

距離化可能定理：近傍

一色三良 (conscious77)

2024 年 1 月 18 日

この文章ではある種の条件を満たす近傍の存在から分かる距離化可能定理を紹介していく。

1 本文

この文章では以下の定理を元に距離化可能定理の証明を進めていく。

事実 1 (Alexandroff-Urysohn-Tukey). T_0 空間 X が距離化可能性であるためには、 X の正規列 $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在し、各 $x \in X$ について $\{S(x, \mathcal{U}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が x の基本近傍系になる事が必要十分である。

1.1 Frink's Metrization Theorem

定理 2 (Frink). T_0 空間 X が距離化可能であるための必要十分条件は各 $x \in X$ に基本近傍系を成す x の近傍からなる列 $\{V_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在し、次の条件を充たすことである。

任意の $x \in X$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $m \in \mathbb{N}$ が存在して

$$V_m(y) \cap V_m(x) \neq \emptyset \implies V_m(y) \subset V_n(x)$$

が成り立つ。

証明. 与えられた条件が距離化可能性の必要条件となることは 2^{-n} 近傍などを考えれば明らかである。十分条件であることを示そう。

まず、条件に現れる $\{V_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ はすべて開近傍であり、

$$V_{n+1}(x) \subset V_n(x)$$

を充たすと仮定しても良く、 $x \in X$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して存在する m は $m > n$ としてもよい。(なぜか?)

また、条件に現れる $x \in X$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して存在する m をひとつ選択し、それを $q(x, n)$ と書こう。このとき $q(x, n) \geq n$ に注意しよう。そして $\phi: X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を

$$\phi(x, 1) = 1, \phi(x, k+1) = q(x, \phi(x, k))$$

と帰納的に定義し、各 $n \in \mathbb{N}$ について $\mathcal{U}_n$ を

$$\mathcal{U}_n = \{V_{\phi(x, n)}(x)\}_{x \in X}$$

と定義する。このとき $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が事実 1 の条件を充たすことを見よう。

$\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が正規列であること： $a \in X$ を任意に与え、 $N \in \mathbb{N}$ を

$$N = \min\{\phi(x, n) \mid a \in V_{\phi(x, n)}(x) \in \mathcal{U}_n\}$$

とし、 $b \in X$ を $N = \phi(b, n)$ を充たすものとする。すると $a \in V_{\phi(x, n)}(x)$ の $V_{\phi(x, n)}(x) \subset V_N(x)$ から

$$V_N(b) \cap V_N(x) \neq \emptyset$$

であり、 $N = \phi(b, n) = q(b, \phi(b, n-1))$ なので

$$V_{\phi(x, n)}(x) \subset V_N(x) \subset V_{\phi(b, n-1)}(b)$$

となるからして

$$S(a, \mathcal{U}_n) \subset V_{\phi(b, n-1)}(b) \in \mathcal{U}_{n-1}$$

であるから $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は正規列となる。

次に $\{S(x, \mathcal{U}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が x の基本近傍系となること： $\{V_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が x の基本近傍系を成していることを利用しよう。

任意に $x \in X$ と $n \in \mathbb{N}$ を与え $k = q(x, n)$ とすると上と同様の議論により、 $b \in X$ が存在して

$$s(x, \mathcal{U}_{k+1}) \subset V_{\phi(b, k)}$$

となる。そして ϕ の定義から $\phi(x, k) \geq k$ なので単調性から $x \in V_{\phi(b, k)} \subset V_k(b)$ なので

$$V_k(x) \cap V_k(b) \neq \emptyset$$

であり、 $k = q(x, n)$ なので

$$V_{\phi(b, k)} \subset V_k(b) \subset V_n(x)$$

つまり

$$s(x, \mathcal{U}_{k+1}) \subset V_n(x)$$

であり、 $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は x の基本近傍系になるから $\{S(x, \mathcal{U}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は x の基本近傍系となる

以上から事実 1 により X は距離化可能となる。 □

1.2 Nagata's "Contribution" Theorems of Metrizable

位相空間 X について以下の 4 つの条件を与えよう。

条件 (T)[Triple Sequences Condition]

各 $x \in X$ に x の近傍からなる 3 つの列 $\{A_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}, \{B_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}, \{C_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して

- (1) $\{A_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は x における基本近傍系を成す。
- (2) $y \notin A_n(x) \implies C_n(y) \cap B_n(x) = \emptyset$
- (3) $y \in B_n(x) \implies C_n(y) \subset A_n(x)$

を充たす。

条件 (D)[Double Sequences Condition]

各 $x \in X$ に x の近傍からなる 2 つの列 $\{S_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}, \{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して

- (1) $\{S_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は x における基本近傍系を成す。
- (2) $y \notin S_n(x) \implies T_n(y) \cap T_n(x) = \emptyset$
- (3) $y \in T_n(x) \implies T_n(y) \subset S_n(x)$

を充たす。

条件 (S)[Single Sequence Condition]

各 $x \in X$ に x の近傍からなる列 $\{U_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して

- (1) $\{U_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は x における基本近傍系を成す。
- (2) $y \notin U_n(x) \implies U_{n+1}(y) \cap U_{n+1}(x) = \emptyset$
- (3) $y \in U_{n+1}(x) \implies U_{n+1}(y) \subset U_n(x)$

を充たす。

条件 (Z)[Zero Sequences Condition]

各 $x \in X$ に x の近傍からなる列 $\{N_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して、任意の $x \in X$ と x の任意の近傍 U について x の近傍 V と $m \in \mathbb{N}$ が存在して

- (1) $y \notin U \implies N_m(y) \cap V = \emptyset$
- (2) $y \in V \implies N_m(y) \subset U$

を充たす。

J.Nagata による次の定理が成り立つ

定理 3 (Nagata). T_0 空間 X について以下は同値。

- (0) X は距離化可能
- (1) X は**条件 (T)** を充たす
- (2) X は**条件 (D)** を充たす
- (3) X は**条件 (S)** を充たす
- (4) X は**条件 (Z)** を充たす

証明. (0) から他の条件が従うのは 2^{-n} 近傍などを考えればわかる。

以下 (3) $\implies$ (4) $\implies$ (1) $\implies$ (2) $\implies$ (0) の順に証明する。

[(3) $\implies$ (4) の証明]

$N_n(x) = U_n(x)$ とし、任意の x と x の任意の近傍 U について $U_k(x) \subset U$ となる k を選び $m = k + 1$ とし、 $V = U_m(x)$ とすれば**条件 (Z)** が成り立つことは分かる。

[(3) $\implies$ (4) の証明終わり]

[(4) $\implies$ (1) の証明]

まず、**条件 (Z) の (2)** から $\{N_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が x の基本近傍系になることが分かる。あとは簡単である。

[(4) $\implies$ (1) の証明終わり]

[(1) $\implies$ (2) の証明]

$S_n(x) = A_n(x)$, $T_n(x) = B_n(x) \cap C_n(x)$ とすれば簡単にわかる。

[(1) $\implies$ (2) の証明終わり]

[(2) $\implies$ (0) の証明]

定理 2 を援用しよう。まず、 $S_{n+1} \subset S_n(x)$, $T_{n+1}(x) \subset T_n(x)$ を仮定してもよい (なぜか?)

最初に $\{T_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ が x の基本近傍系であることを示そう。しかしこれは**条件 (D) の (1) と (3)** からすぐに分かる。

$\{T_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ が定理 2 の仮定をみたすことを言おう。

任意の $x \in X$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\{S_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ が基本近傍系であることを用いると $k > n$ でかつ

$$S_k(x) \subset T_n(x)$$

となる $k \in \mathbb{N}$ が存在する。さらに $m > k$ でかつ

$$S_m(x) \subset T_k(x)$$

となる $m \in \mathbb{N}$ が存在する。そして今、

$$T_m(y) \cap T_m(x) \neq \emptyset$$

を仮定すると**条件 (D) の (2)** から $y \in S_m(x)$ となる。そして $S_m(x) \subset T_k(x)$ から $y \in T_k(x)$ であるので**条件 (D) の (3)** から $T_k(y) \subset S_k(x)$ であり、 $S_k(x) \subset T_n(x)$ でかつ $T_m(y) \subset T_k(y)$ なので

$$T_m(y) \subset T_n(x)$$

となり定理 2 の仮定が充たされるので X が距離化可能であることが分かる。

[(2) $\implies$ (0) の証明終わり]

□

2 おまけ

一様空間の距離化可能性

定理 4. 可算な基本近縁系を持つ T_0 一様空間は距離化可能である。

証明. 定理の仮定を充たす一様空間を X とする。このとき、基本近縁系 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$(1) \quad U_n^{-1} = U_n$$

$$(2) \quad U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$$

を充たすように取ることが出来る。このとき、 $\{U_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が**条件 (S)** を充たす事を見よう。まずこれが基本近傍系であることはわかる。さて、 $U_{n+1}(y) \cap U_{n+1}(x) \neq \emptyset$ と仮定し、 $z \in U_{n+1}(y) \cap U_{n+1}(x)$ としよう。すると $(z, y), (z, x) \in U_{n+1}$ なので U_n の取り方から $(y, x) \in U_n$ となるので $y \in U_n$ が分かる。これで**条件 (S) の (2) の対偶**が示された。

次に $y \in U_{n+1}(x)$ と仮定し、 $z \in U_{n+1}(y)$ を任意に与えると $(y, x), (z, y) \in U_{n+1}$ なので $(z, x) \in U_n$ となる。よって $z \in U_n(x)$ つまり $U_{n+1}(y) \subset U_n(x)$ となるので**条件 (S) の (3)** が充たされる。よって以上から X が距離化可能空間であることが分かる。 □

参考文献

- [1] A.H.Frink *Distance functions and the metrization problem*, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 43, No. 2 (1937), pp133-142.
- [2] H.W.Martin, *A note on the Frink metrization theorem*, Rocky Mountain J. Math. Vol. 6, No. 1 (1976), pp155-158.
- [3] J.Nagata, *A contribution to the theory of metrization*, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A Vol. 8, No. 2 (1957), pp185-192.
- [4] V.Pambuccian, *A Simple Proof of Metrization Theorem*, Mathematical Chronicle Vol.13 (1984) pp71-72
- [5] S.Willard, *General Topology*, Dover Publications, 2004, pp174, Problem 23G