

Simplified Arens Square

一色三良 (conscious77)

2019 年 6 月 8 日

$J = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ と置き、 $X = J \times J \cup \{(0, 0), (1, 0)\}$ と定義する。

$n \in \mathbb{N}$ について

$$L_n = \{(x, y) \in J \times J \mid 0 < x < 1/2, 0 < y < 1/n\} \cup \{(0, 0)\}$$

$$R_n = \{(x, y) \in J \times J \mid 1/2 < x < 1, 0 < y < 1/n\} \cup \{(1, 0)\}$$

と定義して $(0, 0)$ には $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を、 $(1, 0)$ には $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を基本近傍系として、そして $J \times J$ の元には普通の平面の部分集合としての近傍系を導入するとキチンと位相を導入出来る。この空間を $(X, \mathfrak{D})$ と書こう。

命題 1. $(X, \mathfrak{D})$ はハウスドルフ空間である。

証明. 明らか

□

命題 2. $(X, \mathfrak{D})$ は正則空間ではない。

証明.

$$CL(L_n) = \{(x, y) \in J \times J \mid 0 < x \leq 1/2, 0 < y \leq 1/n\} \cup \{(0, 0)\}$$

$$CL(R_n) = \{(x, y) \in J \times J \mid 1/2 \leq x < 1, 0 < y \leq 1/n\} \cup \{(1, 0)\}$$

から分かる。

□

命題 3. $(X, \mathfrak{D})$ はパラコンパクトではない。

証明. パラコンパクトハウスドルフ空間は正則空間でなければならないからである。

□

命題 4. $(X, \mathfrak{D})$ はメタコンパクトである。

証明. まず X の部分空間として $J \times J$ は普通の平面の部分空間としての位相と一致することを鑑みると、 $J \times J$ がパラコンパクトである事が分かる。さらに $J \times J$ は X の開集合である。

X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ についてこれを $J \times J$ に制限する。つまり

$$\mathcal{V} = \{U \cap (J \times J) \mid U \in \mathcal{U}\}$$

を考える。 $J \times J$ はパラコンパクトなので $\mathcal{V}$ の局所有限開細分被覆 $\mathcal{P}$ が存在する。そして $(0, 0), (1, 0)$ を含む $\mathcal{U}$ の元をひとつずつ選び A, B とすると

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{A, B\}$$

は $\mathcal{U}$ の点有限開細分被覆である。

□

命題 5. $(X, \mathfrak{O})$ は σ コンパクトである。従ってリンデレフ空間である。

証明. X の部分空間 $J \times J$ が σ コンパクトであり、 $\{(0, 0), (1, 0)\}$ もコンパクトだからである。□

命題 6. $(X, \mathfrak{O})$ は可算パラコンパクトではない。

証明. リンデレフかつ可算パラコンパクトならばパラコンパクトでなければならないからである。□

命題 7. $(X, \mathfrak{O})$ は第二可算公理を充たす。

証明. X の部分空間 $J \times J$ が開部分空間であり、かつ第二可算で、 $(0, 0), (1, 0)$ はそれぞれ可算な基本近傍系を持つからである。□

以上から $(X, \mathfrak{O})$ は可算パラコンパクトではないメタコンパクト σ コンパクトハウスドルフ空間である事が分かる。

定義 8. 集合 X とその部分集合族 $\mathcal{A}$ 、及び $p \in X$ について

$$\text{St}(p, \mathcal{A}) = \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{A}, p \in A\}$$

を $\mathcal{A}$ による S を中心とする星型集合という。

定義 9. 位相空間 X の開被覆の列 $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が展開列であるとは任意の点 $x \in X$ について $\{\text{St}(x, \mathcal{U}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が x の基本近傍系になることである。位相空間に展開列が常に存在するとは限らない。^{*1}

そして展開列を持つ空間を展開可能空間という。

命題 10. 位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ は展開可能空間である。

証明. $J \times J$ のユークリッド距離での中心 $p \in J \times J$ の r 開球を $B_r(p)$ と置く。つまり

$$B_r(p) = \{x \in J \times J \mid \|x - p\| < r\}$$

である。 $B_r(p) \subset J \times J$ であることと $B_r(p)$ が X の開集合であることに注意しよう。そして

$$\mathcal{U}_n = \{B_{2^{-n}}(p) \mid p \in J \times J\} \cup \{L_n, R_n\}$$

とおけばこれは開被覆になる。

$p = (0, 0)$ のとき $\text{St}(p, \mathcal{U}_n) = L_n$ で $p = (1, 0)$ のときは $\text{St}(p, \mathcal{U}_n) = R_n$ である。また $p \in J \times J$ について、 $r > 0$ を任意にあたえて、 n を十分大きく取れば $p \notin L_n \cup R_n$ と出来て、さらに $\text{St}(p, \mathcal{U}_n) \subset B_r(p)$ と出来るので $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は展開列となる。□

注意. 展開可能な T_3 空間をムーア空間と言うのだが、空間 X はムーア空間ではない展開可能空間の例ということである。

参考文献

- [1] L.A.Steen and J.A.Seebach, *Counterexamples in Topology*, Dover Publications, Inc., New York, 1995, pp100, Simplified Arens Square

^{*1} 第一可算公理を充たさない空間を考えれば当たり前である。