

距離化可能定理：破片

電波通信

2018 年 8 月 2 日

1 準備

定理 1. T_3 空間に於いて以下は同値

- (1) X はパラコンパクト
- (2) X の任意の開被覆は閉集合からなる局所有限な被覆によって細分される
- (3) X の任意の開被覆は（閉とも開とも限らない集合からなる）局所有限な被覆によって細分される

証明. T_3 性から各点の閉近傍全体が基本近傍系を成していることから (1) $\implies$ (2) がわかる。また (2) $\implies$ (3) は明らかであるから以下の論理包含図式が得られる。

$$(1) \implies (2) \implies (3)$$

以下 (3) $\implies$ (1) を証明する。

[(3) $\implies$ (1) の証明]

$\mathcal{V}$ を X の開被覆とすると (3) から局所有限な（閉とも開とも限らない）被覆で細分されるそれを $\mathcal{A}$ と置く。 $\mathcal{A}$ は局所有限なので各 x 毎に $\mathcal{A}$ の局所有限性を担保する x の近傍 W_x が存在する。ここで T_3 性の仮定からより強く $CL(W_x)$ は $\mathcal{A}$ の有限個の元としか交わらないとしてもよい。すると $\mathcal{W} = \{W_x\}_{x \in X}$ は X の開被覆なので再び (3) から $\mathcal{W}$ の局所有限な被覆である細分 $\mathcal{B}$ が存在する。この $\mathcal{B}$ は $\mathcal{W}$ の細分なので $\mathcal{B}$ の任意の元の閉包 $CL(B)$ は $\mathcal{A}$ の有限個の元としか交わらない。更に

$$\mathcal{C} = \{CL(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

と置くとこれは局所有限な閉被覆で $C \in \mathcal{C}$ は $\mathcal{A}$ の有限個の元としか交わらない。ここで $A \in \mathcal{A}$ に対して

$$U_A = X \setminus \bigcup \{C \mid C \cap A = \emptyset, C \in \mathcal{C}\}$$

と定義すると $A \subset U_A$ であり $\mathcal{C}$ の局所有限性から U_A は開集合である。この時次が成り立つ。 $C \in \mathcal{C}$ について

$$C \cap U_A \neq \emptyset \iff C \cap A \neq \emptyset$$

なぜなら、 $C \cap U_A \neq \emptyset$ とすると U_A の定義から $C \cap A \neq \emptyset$ でしかありえない。逆は明らか。対偶を取れば

$$C \cap U_A = \emptyset \iff C \cap A = \emptyset$$

も成り立つ。よって $\mathcal{C}$ は $\{U_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ の有限個の元としか交わらない。

$\{U_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ が局所有限であることを示そう。各点 x について $\mathcal{C}$ の局所有限性を担保する x の近傍 N が存在する。 N は $\mathcal{C}$ の有限個の元 $C_1, C_2, \dots, C_m$ としか交わらず、 $\mathcal{C}$ が被覆を成すことから

$$x \in N \subset \bigcup_{i=1}^m C_i$$

となる。よって $\{U_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ の元が N と交われば $C_1, C_2, \dots, C_m$ のいずれかと必ず交わっているが、 $C_1, C_2, \dots, C_m$ の各々は $\{U_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ の有限個の元とし交わらないので N も $\{U_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ の有限個の元とし交わらない。よって $\{U_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ は局所有限である。最後に $\mathcal{A}$ が $\mathcal{V}$ の細分を成していることから $A \in \mathcal{A}$ 毎に

$$A \subset O_A$$

となる $O_A \in \mathcal{U}$ を選び、

$$\{U_A \cap O_A\}_{A \in \mathcal{A}}$$

とすると、明らかに $\mathcal{V}$ の細分で $A \subset U_A \cap O_A$ で $\mathcal{A}$ が被覆を成していることから $\{U_A \cap O_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ も被覆で $\{U_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ が局所有限であることから $\{U_A \cap O_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ も局所有限である。以上で X がパラコンパクトであることが示された。

[(3) $\implies$ (1) の証明終わり]

□

系 2. 位相空間 X に、各 $A \in \mathcal{F}$ が X の閉集合で部分空間としてパラコンパクトハウスドルフであるような局所有限な被覆 $\mathcal{F}$ が存在するならば X もパラコンパクトハウスドルフである。

証明. 位相的な直和空間 $Y = \coprod_{A \in \mathcal{F}} A$ は各 A が T_4^{*1} なので Y も T_4 になる。そして局所有限性から自然な写像

$$i: \coprod_{A \in \mathcal{F}} A \rightarrow X$$

は閉写像になる。 T_4 空間の閉像は T_4 になるので X は T_4 空間になり、特にハウスドルフ空間である。次にパラコンパクト性を示そう。

$\mathcal{U}$ を X の開被覆とする。そして各 $A \in \mathcal{F}$ について

$$\mathcal{U}_A = \{U \cap A\}_{U \in \mathcal{U}}$$

と定義すると $\mathcal{U}_A$ は A の開被覆である。よって A における $\mathcal{U}_A$ の局所有限な細分である A の被覆が存在する。それを $\mathcal{R}_A$ と置こう。そして

$$\mathcal{R} = \{S \in \mathcal{R}_A \mid A \in \mathcal{F}\} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{R}_A$$

と定義する。 $\mathcal{F}$ が被覆であることから $\mathcal{R}$ は X の被覆となり、 $\mathcal{U}$ の細分となる。 $\mathcal{R}$ が局所有限であることを示そう。任意の $p \in X$ について $\mathcal{F}$ の局所有限性を担保する p の近傍 N をとる。更に $O = \bigcap_{p \notin F, F \in \mathcal{F}} (X \setminus F)$ とすると $\mathcal{F}$ の局所有限性から O は p の属する開集合である。 $V = N \cap O$ は p の近傍である。そして V は $A_1, A_2, \dots, A_s \in \mathcal{F}$ 以外の $\mathcal{F}$ の元以外と交わらないとすると、 O の定義から任意の $i = 1, 2, \dots, s$ について

*1 パラコンパクトハウスドルフ空間が T_4 になることを思い出せ。

$p \in A_i$ である。各 $\mathcal{U}_{A_i}$ は A_i の中で局所有限なのでその局所有限性を担保する p の A_i における近傍 B_i が存在する。 X における p の近傍 U_i が存在して $U_i \cap A_i = B_i$ となる。さて、 $W = V \cap \bigcap_{i=1}^s U_i$ と置けばこれは $\mathcal{R}$ の有限個の元としか交わらない。よって $\mathcal{R}$ は局所有限である。そして先の定理 1 から X はパラコンパクトであることが分かる。 $(\mathcal{R}$ の元は閉だとか開だとかであるとは一般に言えない。)

□

先の系 2 の仮定における「局所有限」の部分に「有限」にした命題も成り立つ。系 2 の特別な場合に過ぎないが、一応別に述べておく。

系 3. 位相空間 X に、各 $A \in \mathcal{F}$ が X の閉集合で部分空間としてパラコンパクトハウスドルフであるような有限な被覆 $\mathcal{F}$ が存在するならば X もパラコンパクトハウスドルフである。

2 距離化可能：破片

注意. このセクション中でしばしば「距離空間の簡単な議論」と言うと思うが、それは a を中心とした半径 r の開球を $B(a, r)$ と書くときに

$$p \in B(x, r) \implies B(x, r) \subset B(p, 2r)$$

が成り立つということである。

事実 4 (Bing-長田-Smirnov の距離化可能定理). T_3 空間 X について以下は同値

- (4) X は距離化可能
- (5) X は σ 疎な開基を持つ
- (6) X は σ 局所有限な開基を持つ

定理 5. ハウスドルフ空間に於いて以下は同値。

- (1) パラコンパクトでかつ局所距離化可能
- (2) 距離化可能

証明. (2) $\implies$ (1) は明らかである。逆を示そう。

まず X は T_3 空間のである。そして

$$\mathcal{U} = \{V \mid V \text{ は開集合で距離化可能} \}$$

と定義すると X が局所距離化可能であることから $\mathcal{U}$ は被覆であり、 X のパラコンパクト性から局所有限開被覆 $\mathcal{V}$ で $\mathcal{U}$ を細分するものが存在する。特に $\mathcal{V}$ の任意の元は距離化可能である。 V 毎に V の位相と両立する距離を選び d_V としておく。さて各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$\mathcal{A}_n = \{B(x, 2^{-n}; d_V) \mid x \in V \in \mathcal{V}\}$$

と定義し、 $\mathcal{B}_n$ を $\mathcal{A}_n$ を細分する局所有限開被覆とする。ここで $x \in V$ について

$$B(x, r; d_V) = \{y \in V \mid d(x, y) < r\}$$

であろ。さて

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$$

が X の基底になることを見よう。

U を X の任意の開集合とし $p \in U$ とする。この時 $p \in V$ となる $V \in \mathcal{V}$ は有限個であり、そのような V について $U \cap V$ は V の開集合であるので n を十分大きく取ると $p \in V$ となる任意の $V \in \mathcal{V}$ について

$$B(p, 2^{-n}; d_V) \subset V \cap U$$

が成立する。そして $p \in G$ となる $G \in \mathcal{B}_{n+1}$ が存在し、さらに $\mathcal{B}_{n+1}$ が $\mathcal{A}_{n+1}$ の細分なので $G \subset B(y, 2^{-n-1}; d_W)$ となる $y \in X$ と $W \in \mathcal{A}_{n+1}$ が存在する。 $B(y, 2^{-n-1}; d_W) \subset W$ なので $p \in W$ であるから $B(p, 2^{-n}; d_W) \subset W \cap U$ である。そして距離空間の簡単な議論から

$$B(y, 2^{-n-1}; d_W) \subset B(p, 2^{-n}; d_W) \subset W \cap U$$

なので結局

$$p \in G \subset U$$

が成り立つので $\mathcal{B}$ は X の開基である。そして $\mathcal{B}$ は σ 局所有限なので X は事実 4 から距離化可能である。 $\square$

補題 6. 位相空間 X が有限個の距離化可能な閉部分空間の和なら X は距離化可能である。

証明. 位相空間 X が 2 つの距離化可能な閉部分空間の和であるときに証明すれば他の場合は帰納的に示される。

$X = A \cup B$ で A, B は X の閉集合で距離化可能であるとする。 A, B の位相と両立する距離をそれぞれ d, e とする。このとき A, B はパラコンパクトハウスドルフなので系 3 から X もパラコンパクトハウスドルフである。

$a \in A$ について $P(a, r) = \{x \in A \mid d(a, x) < r\}$ とし、 $b \in B$ について $Q(b, r) = \{y \in B \mid e(b, y) < r\}$ とする。そして $C(a, r), D(b, r)$ をそれぞれ

$$C(a, r) \cap A = P(a, r), \quad D(a, r) \cap B = Q(b, r)$$

となる X の開集合とし、 $p \in \text{Bdry}(A) \cap \text{Bdry}(B)$ について $O(p, r) = C(p, r) \cap D(p, r)$ と置く。さらに $a \in \text{Int}(A)$ について $U(a, r) = C(a, r) \cap \text{Int}(A)$ とし、 $b \in \text{Int}(B)$ について $V(b, r) = D(a, r) \cap \text{Int}(B)$ とする。このとき $O(x, r), U(a, r), V(b, r)$ は X の開集合である。

以上を踏まえて

$$\mathcal{U}_n = \{O(p, 2^{-n}) \mid p \in \text{Bdry}(A) \cap \text{Bdry}(B)\} \cup \{U(a, 2^{-n}) \mid a \in \text{Int}(A)\} \cup \{V(b, 2^{-n}) \mid b \in \text{Int}(B)\}$$

と定義し、 $\mathcal{V}_n$ を $\mathcal{U}_n$ を細分する X の局所有限な開被覆とする。 $X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \cup (\text{Bdry}(A) \cap \text{Bdry}(B))$ と直和分解されることに注意しよう。このとき

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$$

が X の開基になることを見よう。

W を X の任意の開集合とし、 $x \in W$ を任意に与える。

まず $x \in \text{Bdry}(A) \cap \text{Bdry}(B)$ としよう。 $W \cap A$ は A の開集合で $W \cap B$ は B の開集合なので十分大きく n を取れば $x \in P(x, 2^{-n}) \subset W$, $x \in Q(x, 2^{-n}) \subset W$ となる。

さて $x \in G$ となる $G \in \mathcal{V}_{n+1}$ を取れば $G \subset O(y, 2^{-n-1})$ となる $y \in \text{Bdry}(A) \cap \text{Bdry}(B)$ が存在する。 $O(y, 2^{-n-1})$ の定義から

$$O(y, 2^{-n-1}) \subset P(y, 2^{-n-1}) \cup Q(y, 2^{-n-1})$$

となり、これと距離空間の簡単な議論から $O(y, 2^{-n-1}) \subset P(x, 2^{-n}) \cup Q(x, 2^{-n}) \subset W$ となる。よって $x \in G \subset W$ となる $G \in \mathcal{V}$ が存在する。

次に $x \notin \text{Bdry}(A) \cap \text{Bdry}(B)$ のとき $N \in \mathbb{N}$ を十分大きく取れば $n \geq N$ のとき、任意の $p \in \text{Bdry}(A) \cap \text{Bdry}(B)$ について $x \notin O(p, 2^{-n})$ が成り立つように出来る。

さて、各 $n \geq N$ 毎に $x \in G_n$ となる $G_n \in \mathcal{V}_n$ を選んでおき、さらに $G_n \subset E_n$ となる $E_n \in \mathcal{U}_n$ も選んでおく。このとき E_n が $O(p, 2^{-n})$ ($p \in \text{Bdry}(A) \cap \text{Bdry}(B)$) の形をしていることはあり得ないので E_n は $U(a, 2^{-n})$ もしくは $V(b, 2^{-n})$ の形をしている。

無限に多くの $\{E_n\}_{n \geq N}$ の元が $U(a, 2^{-n})$ の形をしているときを考えよう。

このとき N をさらに十分大きくして $U(x, 2^{-N}) = P(x, 2^{-N}) \subset W$ となるようにする。この時 N より大きい n で $x \in G_n \subset E_n = U(a, 2^{-n}) = P(a, 2^{-n})$ となるものが存在する。すると距離空間の簡単な議論から

$$x \in U(a, 2^{-n}) = P(a, 2^{-n}) \subset U(x, 2^{-N}) = P(x, 2^{-N}) \subset W$$

となるので結局 $x \in G_n \subset W$ となる。無限に多くの $\{E_n\}_{n \geq N}$ の元が $V(a, 2^{-n})$ の形をしているときも同様である。

以上で $\mathcal{V}$ が開基となる事が分かった。そしてそして $\mathcal{V}$ は σ 局所有限で X は T_3 空間なので事実 4 から X は距離化可能である。 $\square$

定理 7. 位相空間 X に於いて以下は同値

- (1) X は距離化可能な閉集合からなる局所有限な族の和で書ける。
- (2) 距離化可能

証明. (2) $\implies$ (1) は明らかである。逆を示そう。

$\mathcal{F}$ を距離化可能な閉集合からなる局所有限被覆としよう。 $\mathcal{F}$ の任意の元はパラコンパクトハウスドルフなので系 2 から X はパラコンパクトハウスドルフである。また任意の $p \in X$ について p 近の傍 N が存在して $\mathcal{F}$ の高々有限個の元としか交わらない。すると N は距離化可能な閉集合の有限個の和に含まれるので補題 6 から N は距離化可能である。つまり X は局所距離化可能である。よって定理 5 から X は距離化可能であることが分かる。 $\square$

注意. この補題は A, B に閉性を仮定しなければ成立しない。例えば非可算濃度の離散空間を 1 点コンパクト化した空間は無限遠点という 1 点と離散空間の和であり、それらは距離化可能であるが、1 点コンパクト化された空間は明らかに距離化可能で無い。

定理 8. 正規空間 X に於いて以下は同値。

- (1) X は距離化可能な開集合からなる局所有限な族の和として書ける。
- (2) 距離化可能

証明. (2) $\implies$ (1) は明らかである。逆を示そう。

$\mathcal{U}$ を距離化可能な開集合からなる局所有限な被覆としよう。すると X が正規であることから $\mathcal{U}$ の閉収縮 $\{F_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ が存在する。つまり、

$$F_U \subset U$$

となる閉集合の族 $\{F_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ が存在する。

このとき $\{F_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ は局所有限であり、各 F_U は距離化可能であるから先の定理 8 から X は距離化可能であることが分かる。 $\square$

定理 5 から以下の位相多様体の距離化可能性に関する定理は明らかであろう。

系 9. 位相多様体 M に於いて

距離化可能性 $\iff$ パラコンパクト性

参考文献

[1] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, 2004, pp174, Problem 23G