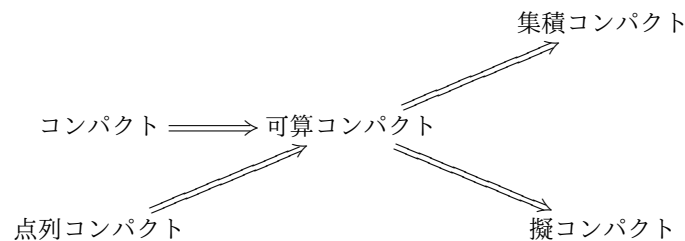


例示：点列コンパクト性とかコンパクト性

一色三良 (conscious77)

2019 年 5 月 23 日



定義 1 (可算コンパクト). 位相空間 X はその上の任意の可算開被覆に有限部分被覆が存在するとき可算コンパクトという。また、可算コンパクト性は空間 X 上の非空閉集合からなる任意の有限交叉的な可算族が非空な共通部分をもつことと同値である。またまた、可算個の非空閉集合からなる単調減少^{*1}な $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 族が非空な共通部分を持つことと可算コンパクト性は同値である。

定義 2. 位相空間 X の部分空間 M と点 $x \in X$ について x が部分集合 M の集積点であるとは、

$$x \in \text{CL}(M \setminus \{x\})$$

を満たすことである。つまり、 x の任意の近傍 V について、ある $m \in M$ が存在して $m \in V$ と $x \neq m$ を満たすということである。

定義 3 (集積コンパクト). 位相空間 X の任意の無限集合が集積点を持つとき、空間 X は集積コンパクトであるという。無限集合は可算部分集合を持つので空間 X が集積コンパクトであることと、 X の任意の可算無限集合が集積点を持つことは同値である。

命題 4. T_1 空間 X において可算コンパクト性と集積コンパクト性は同値である。

証明. [可算コンパクト $\implies$ 集積コンパクトの証明]

X の任意の可算集合に集積点があることを示せばよい。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を可算集合とする。添え字付けは単射であるとする。^{*2}さて、

$$F_n = \text{CL}(\{a_i \mid i \geq n\})$$

とすると、もちろん F_n は非空な閉集合で $F_n \supset F_{n+1}$ を満たす。よって X の可算コンパクト性から

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$$

^{*1} つまり $F_n \supset F_{n+1}$ ということ

^{*2} つまり、 $n \neq m \implies a_n \neq a_m$ ということである。

である。ここで $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ を取ろう。このとき c の任意の近傍 V と任意の n について

$$V \cap \{a_i \mid i \geq n\} \neq \emptyset$$

であり、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の添え字付けは単射なので c は $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の集積点となる。よって X は集積コンパクトである。(実は T_1 を用いていないことに注意しよう。 T_1 を使うのは逆を導くときということである。)

[可算コンパクト $\implies$ 集積コンパクトの証明終わり]

[集積コンパクト $\implies$ 可算コンパクトの証明]

非空な閉集合なる単調減少な族 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を考える。必要なら番号を付け替えて単調減少よりも強く

$$F_n \supsetneq F_{n+1}$$

としてもよい。(狭義の単調減少) さて x_n を

$$x_n \in F_n \setminus F_{n+1}$$

を充たすものとしよう。このとき $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は添え字付けが単射なので可算集合である。そして X の集積コンパクト性から A には集積点 c が存在する。もしこのときある $m \in \mathbb{N}$ が存在して $c = x_m$ となったとしよう。

このとき F_{m+1} は閉集合であり $F_{m+1} \supset \{x_i \mid i > m\}$ であるから $X \setminus F_{m+1}$ は $c = x_m$ を含み、 $\{x_i \mid i > m\}$ と交わらない開集合であり、また T_1 性から $X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$ は $c = x_m$ を含み、 $\{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$ と交わらない開集合であるから、これら二つの開集合の共通部分を O とするとこれは $c = x_m$ を含む開集合であり、 $O \cap A = \{x_m\}$ となり、 c が A の集積点であることと矛盾する。よって任意の $m \in \mathbb{N}$ について $c \neq x_m$ である。

以上のことを踏まえると任意の $m \in \mathbb{N}$ について $X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ は T_1 性から開集合であり、 c を含む開集合である。このことから c は任意の $m \in \mathbb{N}$ について $\{x_i \mid i > m\}$ の集積点でもある。 x_n の定義と F_n が閉集合であることから、特に任意の $n \in \mathbb{N}$ について $c \in F_n$ である。よって

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \ni c$$

なので $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ がわかり、 X の可算コンパクト性が分かった。 □

定義 5 (点列). 位相空間 X 内の点列とは写像 $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow X$ のことである。

定義 6 (部分列). X 内の点列 β が点列 α の部分列であるとは狭義単調な写像 $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ が存在して

$$\beta = \alpha \circ \phi$$

と表されることである。

定義 7 (点列の収束). X 内の点列 α が X の点 p に収束するとは

$$\forall V \in \mathfrak{N}(p) \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \implies \alpha_n \in V)$$

が成り立つことである。

定義 8 (点列コンパクト). 位相空間 X が点列コンパクトであるとは X 内の任意の点列に収束する部分列が存在する事を言う。

例 9 (点列コンパクトだが、コンパクトでない例). 最小の非可算順序数 ω_1

ω_1 内の可算集合は ω_1 内に $\inf, \sup$ を持つことを鑑みれば、 ω_1 が点列コンパクトである事が分かる。

しかし明らかに ω_1 はコンパクト空間ではない。

例 10 (コンパクトだが点列コンパクトでない例). 離散二元空間 $2 = \{0, 1\}$ の非可算直積空間 $2^{\mathbb{N}}$

$2^{\mathbb{N}}$ の元は $\mathbb{N}$ の冪集合 $2^{\mathbb{N}}$ から $2 = \{0, 1\}$ への写像である。またチコノフの定理よりコンパクトである。

次のような $2^{\mathbb{N}}$ の点列 $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を考える。

$$\alpha_n(S) = \begin{cases} 1 & n \in S \\ 0 & n \notin S \end{cases}$$

この点列に収束する部分列 $\{\alpha_{\phi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在すると仮定しよう。このとき

$$Q = \{\phi(2k) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

を考えると

$$\alpha_{\phi(n)}(Q) = \begin{cases} 1 & n \text{ は偶数} \\ 0 & n \text{ は奇数} \end{cases}$$

となるので $\{\alpha_{\phi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し得ない。よって $2^{\mathbb{N}}$ は点列コンパクトではない。

参考文献

[1] L.A.Steen and J.A.Seebach, *Counterexamples in Topology*, Dover Publications, Inc., New York, 1995