

順序数の位相的重み

一色三良 (conscious77)

2018 年 8 月 3 日

順序数の重さを評価する。一般に位相空間 X の重み $w(X)$ とは X の開基の最小濃度のことである。そして $I(X)$ で X の孤立点全体の集合を表すことにする。また順序集合には开区間から定まる標準的な位相を常に考える事にする。

命題 1. 位相空間 X とその部分空間 S について

$$w(S) \leq w(X)$$

証明. 証明は明らかであろう。 □

命題 2. 位相空間 X について

$$\text{card}(I(X)) \leq w(X)$$

証明. $x \in I(X)$ ならば $\{x\}$ が開集合であり $\{x\}$ は x しか元を含まないことから X の任意の開基 $\mathcal{B}$ について $\{x\} \in \mathcal{B}$ でなければならないからである。 □

命題 3. 順序数 α, β について

$$\alpha + 1 = \beta + 1 \implies \alpha = \beta$$

証明. 明らか。

命題 4. $\mathcal{N}$ を順序集合 X の开区間全体の集合としよう。このとき

$$\text{card}(\mathcal{N}) \leq \text{card}(X \times X)$$

証明. 开区間は (a, b) ($a < b$) の形をしているので明らか。

定理 5. 順序数 α について

$$w(\alpha) = \text{card}(\alpha)$$

証明. α が有限の時は明らかなので以下 α は無限集合とする。 $\kappa = \text{card}(\alpha)$ と置くと $\kappa \leq \alpha$ なのでつまり $\kappa \subset \alpha$ なので命題 1 から

$$w(\kappa) \leq w(\alpha)$$

であり、 κ は極限数なので

$$\text{suc} : \kappa \rightarrow \kappa; x \mapsto x + 1$$

が定義でき、命題 3 から suc は単射である。また、 $x + 1$ の形をした順序数は κ の孤立点になるので命題 2 から

$$\kappa \leq \text{card}(I(\kappa))$$

そして $\mathcal{N}$ を α の開区間全体とすると命題 4 と α は無限集合であることから

$$w(\alpha) \leq \text{card}(\mathcal{N}) \leq \text{card}(\alpha) = \kappa \times \kappa = \kappa$$

以上から

$$w(\alpha) = \kappa = \text{card}(\alpha)$$

を得る。

□