

ストーンチェックコンパクト化の構成

一色三良 (conscious77)

2026 年 7 月 28 日

この文書では $T_{3.5}$ 空間のストーンチェックコンパクト化を構成する。構成するだけなので細かい性質の証明は省略する。

定義 1 (完全正則空間). 点 p とその点を含まない閉集合 C との任意の組 (p, C) が関数で分離出来る。つまり任意の組 (p, C) に対してある実連続関数 $f : X \rightarrow [0, 1]$ で

$$p \in f^{-1}(0), C \subset f^{-1}(1)$$

を満たすものが存在するとき、その空間を**完全正則**であると言う。また、完全正則でかつ T_1 であるような空間を $T_{3\frac{1}{2}}$ 空間もしくは $T_{3.5}$ 空間と呼ぶ。

上と同じ記号を用いると、 $p \in f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$, $f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \cap C = \emptyset$ で $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ は X の開集合なので完全正則空間は正則空間である。よって $T_{3.5}$ 空間は T_3 空間である。

命題 2. $\mathcal{C}$ を完全正則空間 $(X, \mathfrak{D})$ から単位閉区間 $[0, 1]$ への連続関数全体とする。このとき、完全正則空間の位相は $\mathcal{C}$ から定まる始位相 $(X, \mathfrak{I}(\mathcal{C}))^{*1}$ と一致する。^{*2}

証明. $\mathcal{C}$ の元は $(X, \mathfrak{D})$ の連続関数なので明らかに

$$\mathfrak{I}(\mathcal{C}) \subset \mathfrak{D}$$

が成立する。逆向きの包含関係を示そう。 $U \in \mathfrak{D}$ で $x \in U$ とすると、 $X \setminus U$ は $(X, \mathfrak{D})$ の閉集合で p を含まないので X の完全正則性から連続関数 $f : X \rightarrow [0, 1]$ で

$$p \in f^{-1}(0), X \setminus U \subset f^{-1}(1)$$

となるものが存在する。 $\mathcal{C}$ の定義から明らかに $f \in \mathcal{C}$ で

$$p \in f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \subset U$$

なので $f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \in \mathfrak{I}(\mathcal{C})$ から

$$\mathfrak{D} \subset \mathfrak{I}(\mathcal{C})$$

□

次の始位相に関する埋め込み定理を思い出そう。

^{*1} この文書では関数族 $\mathcal{A}$ から誘導される始位相を $\mathfrak{I}(\mathcal{A})$ と書くことにする。

^{*2} 実はこの命題の逆も成立するがすこし面倒なので証明はしない。[2] 参照のこと

事実 3 (始位相の埋め込み定理). 位相空間 $(X, \mathfrak{D})$ には $\mathcal{F} = \{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ から定まる始位相が入っているとしこの関数族の終域を $\{(Y_\lambda, \mathfrak{D}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ とするとき関数

$$\phi : X \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_{\lambda \in \Lambda} ; x \mapsto (f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda}$$

について $\mathfrak{I}(\mathcal{F}) = \mathfrak{I}(\phi)$ が成立する。また ϕ が単射ならばこれは埋め込みになっているつまり $(X, \mathfrak{D})$ は $\prod_{\lambda \in \Lambda} Y_{\lambda \in \Lambda}$ の部分空間 $\phi(X)$ と同相となる。

証明は電波通信の記事にあると思う。

この埋め込み定理と先の命題から次のことが直ちに従う。記号は上のものと同じとする。

定理 4. $T_{3.5}$ 空間 X は

$$\phi : X \rightarrow \prod_{f \in C} [0, 1]; x \mapsto (f(x))_{f \in C}$$

によって $\prod_{f \in C} [0, 1] = [0, 1]^C = I^C$ に埋め込める。

定義 5. $T_{3.5}$ 空間 X のストーンチェックコンパクト化 βX を

$$\beta X = CL_{I^C}(\phi(X))$$

と定義する。

1 継ぎ足し

定義 6 (ゼロ集合、コゼロ集合). 位相空間 X とその上の連続関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ について f の**ゼロ集合** $Z(f)$ を

$$Z(f) = f^{-1}(0)$$

と定義し、**コゼロ集合** $C(f)$ を

$$C(f) = X \setminus Z(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

と定義する。明らかに $Z(f)$ は X の閉集合で $C(f)$ は X の開集合である。また明らかにゼロ集合の補集合はコゼロ集合で、コゼロ集合の補集合はゼロ集合である。

命題 7. X, Y を位相空間、 $f : X \rightarrow Y$ を連続写像、 $A \subset Y$ を Y のゼロ集合とする。このとき、 $f^{-1}(U)$ は X のゼロ集合である。

証明. $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ を $Z(g) = A$ となる連続関数とする。すると

$$Z(g \circ f) = (g \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(g^{-1}(0)) = f^{-1}(A)$$

なので定理は明らかである。 □

双対的に次の命題が成り立つ。

命題 8. X, Y を位相空間、 $f : X \rightarrow Y$ を連続写像、 $U \subset Y$ を Y のコゼロ集合とする。このとき、 $f^{-1}(U)$ は X のコゼロ集合である。

この命題と $\mathbb{R}$ の開集合はすべてコゼロ集合であることから次の系が得られる。

系 9. 位相空間 X と連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ に及び $\mathbb{R}$ の開集合 U について $f^{-1}(U)$ はコゼロ集合である。

命題 10. 位相空間 X のゼロ集合 A について、ある連続関数 $g: X \rightarrow [0, 1]$ が存在して

$$A = Z(g)$$

が成り立つ。

命題 11. 位相空間 X のコゼロ集合 U について、ある連続関数 $g: X \rightarrow [0, 1]$ が存在して

$$U = C(g)$$

が成り立つ。

命題 12. 位相空間 X 上の 2 つの連続関数 $f, g: X \rightarrow [0, +\infty)$ について

$$Z(f) \cap Z(g) = Z(\max(f, g)), \quad Z(f) \cup Z(g) = Z(\min(f, g))$$

が成り立つ。双対的に

$$C(f) \cup C(g) = C(\max(f, g)), \quad C(f) \cap C(g) = C(\min(f, g))$$

が成り立つ。

証明. 明らか

□

系 13. ゼロ集合全体の族は有限個の共通部分及び、有限個の和集合で閉じている。

双対的にコゼロ集合全体の族も有限個の共通部分及び、有限個の和集合で閉じている

系 14. $\mathfrak{J}(\mathcal{C}) = \mathfrak{O}$ となる位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ は完全正則空間

参考文献

[1] 森田紀一, 位相空間論, 岩波全書 331, 岩波書店 1981

[2] M.G.Murdeswar, general topology, Wiley Eastern Limited, 1983