

Tube lemma

一色三良 (conscious77)

2015 年 12 月 4 日

12 月 4 日時点で未完成。

定理 1 (tube lemma). X を位相空間、 Y をコンパクト位相空間とする。更に $x \in X$ と $X \times Y$ の開集合 O が

$$\{x\} \times Y \subset O$$

を満たしているとする。このとき X における x の開近傍 N が存在して

$$\{x\} \times Y \subset N \times Y \subset O$$

を満たす。

証明. $A = \{x\} \times Y$ と置く

$$\mathcal{O} = \{U \times V \mid A \cap (U \times V) \neq \emptyset, U \times V \subset O, U, V \text{ はそれぞれ } X, Y \text{ の開集合}\}$$

と置くと、 $\mathcal{O}$ は開集合族で直積の開集合の定め方から

$$A \subset \bigcup \mathcal{O}$$

が成り立つので $\mathcal{O}$ は A の開被覆である。 A は Y と同相であるからコンパクトなので

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n (P_i \times Q_i) \subset O$$

となる $\mathcal{O}$ の有限部分族 $\{P_i \times Q_i\}_{i=1}^n$ が存在する。そして明らかに

$$Y \subset \bigcup_{i=1}^n Q_i$$

であり

$$N = \bigcap_{i=1}^n P_i$$

と置けば $x \in N$ で

$$A = \{x\} \times Y \subset N \times Y \subset N \times \bigcup_{i=1}^n Q_i = \bigcup_{i=1}^n (N \times Q_i) \subset \bigcup_{i=1}^n (P_i \times Q_i) \subset O$$

が成り立つので証明が終わる。

□

系 2 (有限個のチコノフの定理). 有限個のコンパクト空間の族 $\{X_i\}_{i=1}^n$ について

$$\prod_{i=1}^n X_i$$

はコンパクト

証明. 帰納法により、 $n = 2$ の時のみ示せば良い事がわかる。 X, Y をコンパクト空間とし $X \times Y$ のコンパクト性を示す。 $\mathcal{U}$ を $X \times Y$ の開被覆とし

$$\mathcal{N} = \{N \mid N \text{ は } X \text{ の開集合で、} N \times Y \text{ が } \mathcal{U} \text{ の有限個の元の和集合に含まれる} \}$$

と定義する。すると、各 $x \in X$ について $\{x\} \times Y$ がコンパクトであることと tube lemma から

$$X = \bigcup \mathcal{N}$$

がわかる。 X のコンパクト性から $\mathcal{N}$ の有限部分集合 $\{N_i\}_{i=1}^n$ が存在して

$$X = \bigcup_{i=1}^n N_i$$

となる。そして

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^n N_i \times Y = \bigcup_{i=1}^n (N_i \times Y)$$

であるが、 $\mathcal{U}$ の定義より $N_i \times Y$ は $\mathcal{U}$ の有限個の元の和集合に含まれるので、 $\bigcup_{i=1}^n (N_i \times Y)$ も $\mathcal{U}$ の有限個の元の和集合に含まれる。つまり $X \times Y$ は $\mathcal{U}$ の有限個部分集合で被覆されるので $X \times Y$ はコンパクトである。

□

系 3 (連続関数の sup の連続依存性). 位相空間 X とコンパクト空間 Y 及び $X \times Y$ 上の実連続関数 $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ について

$$F(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y)$$

で定義される $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ は X 上の実連続関数である。

証明. X の任意の点 a での連続性を示す。 $\varepsilon > 0$ を任意に与える。そして $A = \{a\} \times Y$ とし、 $S = f(A) \subset \mathbb{R}$ と置く。 Y はコンパクトなので A はコンパクト集合である。そして d を $\mathbb{R}$ の距離とすると

$$D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; r \mapsto d(r, S)$$

は連続関数なので $T = D \circ f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ は連続である。さて T の連続性から

$$O = \{(x, y) \mid T(x, y) = D \circ f(x, y) = d(f(x, y), S) < \varepsilon\}$$

は $X \times Y$ の開集合で明らかに $A \subset O$ である。よって tube lemma から a の開近傍 N が存在して

$$A \subset N \times Y \subset O$$

となる。このとき D の定義と O の定義から $(a, y), (x, z) \in N \times Y$ について

$$(1) \quad |f(a, y) - f(x, z)| \leq D(S, f(x, z)) < \varepsilon$$

が成り立つ。 Y のコンパクト性から各 $x \in X$ について

$$F(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y) = f(x, y_0)$$

となる y_0 が存在するので、 $x \in N$ ならば (1) から

$$|F(a) - F(x)| < \varepsilon$$

となるので点 a での連続性は示された。 a は任意なので結局 F は X 上連続である。 $\square$

定理 4. Y をコンパクトハウスドルフ空間とし、 $X \subset Y$ について

$$X \times Y$$

が正規であるとする。このとき X はパラコンパクトである。

証明. $\{U_i\}_{i \in I}$ を X の開被覆とする。そして Y の開集合からなる族 $O_{ii \in I}$ を

$$O_i \cap X = U_i$$

となる O_i からなるものとする。そして $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ とし $H = X \times O$ と置く。更に

$$F = \{(x, y) \in X \times Y \mid x = y\}$$

と置く。この集合は包含写像 $X \rightarrow Y$ のグラフとなっているので Y のハウスドルフ性から $X \times Y$ の閉集合となり、明らかに

$$F \subset H$$

となる。そして $X \times Y$ の正規性から F 上で恒等的に 0 の値をとり H の補集合で恒等的に 1 の値を取る実連続関数 $f: X \times Y \rightarrow [0, 1]$ が存在する。さて $F: X \times X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(v, w, y) = |f(v, y) - f(w, y)|$$

とすると明らかに連続関数であり、 Y のコンパクト性から先の系により

$$d(v, w) = \sup_{y \in Y} |f(v, y) - f(w, y)| = \sup_{y \in Y} F(v, w, y)$$

は $X \times X$ の連続関数であり、 X 上の擬距離である。この事から d の ε 開球 X の開集合であり、擬距離 d から誘導される位相 $\mathfrak{D}_d$ は元々の X の位相 $\mathfrak{D}$ より粗い。つまり

$$\mathfrak{D}_d \subset \mathfrak{D}$$

が成り立つ。

$$W_x = \{v \mid d(x, v) < \frac{1}{2}\}$$

と置くと族 $\{W_x\}_{x \in X}$ は $(X, \mathfrak{D}_d)$ の開被覆となり、擬距離空間はパラコンパクトであることから $(X, \mathfrak{D}_d)$ における $\{W_x\}_{x \in X}$ の局所有限開細分 $\{G_j\}_{j \in J}$ が存在する。この族は $\mathfrak{D}_d \subset \mathfrak{D}$ から $(X, \mathfrak{D})$ の局所有限開被覆でもある。また $v \in W_x$ について $f(v, v) = 0$ から

$$f(x, v) = f(x, v) - f(v, v) \leq |f(x, v) - f(v, v)| \leq d(x, v) < \frac{1}{2}$$

よって

$$W_x \subset CL_Y(W_x) \subset \{y \in Y \mid f(x, y) \leq \frac{1}{2}\} \subset O$$

が成立する。 $\{y \in Y \mid f(x, y) \leq \frac{1}{2}\} \subset O$ は $H = X \times O$ で f が H の補集合では恒等的に 1 の値を取ることから従う。そして $\{G_j\}_{j \in J}$ が $\{W_x\}_{x \in X}$ の細分であることから同様に

$$G_j \subset CL_Y(G_j) \subset O$$

が成り立つ。さて $CL_Y(G_j)$ はコンパクト空間 Y の閉集合であることからコンパクトである。よって $CL_Y(G_j) \subset O$ から I の有限部分集合 $A(j)$ が存在して $\{O_i\}_{i \in A(j)}$ は $CL_Y(G_j)$ の被覆となる。そして

$$\{G_j \cap O_i \mid j \in J, i \in A(j)\}$$

と置くとこの族は X の開被覆となり $G_j \subset X$ から $G_j \cap O_i = G_j \cap U_i$ となるので $\{U_i\}_{i \in I}$ の細分となる。 $\{G_j\}$ は $(X, \mathfrak{D})$ の局所有限細分でもあり、 $A(j)$ は有限集合であることから結局 $\{G_j \cap O_i \mid j \in J, i \in A(j)\}$ は $\{U_i\}_{i \in I}$ の局所有限細分となる。よって X はパラコンパクト。□

系 5. 局所コンパクトハウスドルフ空間 X とその 1 点コンパクト化 αX について

$$X \times \alpha X$$

が正規なら X はパラコンパクト

系 6. 完全正則空間 X とそのストーン・チェックコンパクト化 βX について

$$X \times \beta X$$

が正規なら X はパラコンパクト