

陰関数定理

一色三良 (conscious77)

2015 年 10 月 31 日

この文章では陰関数定理を証明する。またノルムは二重の縦線ではなく絶対値のように $|\bullet|$ で書くことにし、どのノルムを使っているかいちいち宣言しない。

定義 1. $U \subset \mathbb{R}^k$ を開集合とし $f: U \rightarrow \mathbb{R}^l$ とする。このとき f が $a \in U$ で全微分可能であるとは線形写像^{*1} $A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ が存在し

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{|f(x) - f(a) - A(x - a)|}{|x - a|} = 0$$

となることである。このとき f は a で任意の方向に偏微分可能で

$$A = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{i=1, \dots, k, j=1, \dots, l}$$

となることがわかる。この A を

$$A = (Df)(a)$$

で表す。

以下 f は C^1 級であるとする。このとき f が U 任意の点で全微分可能であることはよく知られた解析の初等的事実である。このとき f の全微分可能性を言い換えてみよう。

定義 2. $e: U \times U \rightarrow \mathbb{R}^l$ を

$$e(x, y) = f(x) - f(y) - (Df)(y)(x - y)$$

と定義する。この関数は連続関数である。さらに $D = U \times U \setminus \Delta$ (Δ は対角集合) として $E: D \rightarrow \mathbb{R}^l$ を

$$E(x, y) = \frac{e(x, y)}{|x - y|}$$

と定義する。この関数は D 上連続である。

このように関数 e, E を定義するとき、

$$f \text{ が } y \text{ で全微分可能} \iff \lim_{x \rightarrow y, x \neq y} \frac{e(x, y)}{|x - y|} = 0 \iff \lim_{x \rightarrow y} E(x, y) = 0$$

である。このことから次の補題が成り立つ

^{*1} 本当は $A: T_a U \rightarrow T_{f(a)} \mathbb{R}^l$ と書くべくだろうか

補題 3. $a \in U$ を一点固定するとき

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x - a| < \delta, |y - a| < \delta, (x, y) \in D \implies |E(x, y)| < \varepsilon$$

が成り立つ。言い換えると

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x - a| < \delta, |y - a| < \delta, x, y \in U \implies |e(x, y)| \leq \varepsilon |x - y|$$

証明. 三角不等式から $|x - a| < \delta, |y - a| < \delta$ ならば $|x - y| < 2\delta$ なので δ が十分小さければ確かに $|E(x, y)| < \varepsilon$ である。

言い換えの部分は $|E(x, y)| < \varepsilon$ から $|e(x, y)| < \varepsilon |x - y|$ を得るが、 $x = y$ ならば $e(x, y) = 0, |x - y| = 0$ なので確かに $|x - a| < \delta, |y - a| < \delta, x, y \in U$ ならば $|e(x, y)| \leq \varepsilon |x - y|$ が成り立つ。□

以下の事実を思い出そう。

事実 4 (パラメータ付きのバナッハの不動点定理). X を完備距離空間、 T を位相空間とし写像 $f : X \times T \rightarrow X$ が連続であるとし、 $f(x, t) = f_t(x)$ と書くことにする。さらに

$$\exists q \in [0, 1) \quad \forall x, y \in X \quad \forall t \in T \quad d(f_t(x), f_t(y)) \leq qd(x, y)$$

を充たし (q が t に依存していないことに注意せよ。)

$$\forall x \in X \quad f_t(x) \text{ が } t \text{ について有界}$$

であるとする。(このとき x を固定して $f_t(x)$ が t について有界で連続になる。) このとき先の命題から存在と唯一性が示される t 毎の f_t の不動点を $h(t)$ と書くことにし、写像 $h(t) : T \rightarrow X$ とみなしたとき、 $h(t)$ は連続写像である。

この不動点定理を用いて陰関数定理を証明する。その前に $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ とし F が $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ のとき U の $\mathbb{R}^n$ の方の成分を x 成分、 $\mathbb{R}^m$ の方の成分を y 成分と呼ぶ事にして

$$(D_x F) = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right)_{j=1, \dots, m \quad i=1, \dots, n} \quad (D_y F) = \left(\frac{\partial F_j}{\partial y_i} \right)_{i,j=1, \dots, m}$$

と定義する。この記法は以下断りなく使う。 $D_y F$ が正方行列であることに注意。行列として

$$DF = (D_x F | D_y F)$$

である。これをもとにして $(DF)(a, b)$ をが行列として (x, y) に作用してるのを

$$(DF)(a, b)(x, y) = (D_x F)(a, b)x + (D_y F)(a, b)y$$

とかく。本来なら $(x, 0)$ とか $(0, y)$ とか書くべきだが省略してこのように書く。この記法のもと F の全微分の式は

$$F(x, y) = F(a, b) - (D_x F)(a, b)(x - a) - (D_y F)(a, b)(y - b) + e$$

と書かれる。

定理 5. $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ とし $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ は C^1 級で点 $(x_0, y_0) \in U$ で

$$F(x_0, y_0) = 0$$

を充たしているとし、

$$\det((D_y F)(x_0, y_0)) \neq 0$$

であるとする。このとき $O_1 \times O_2 \subset U$ を充たす x_0 の開近傍 O_1 と y_0 の開近傍 O_2 と連続関数 $g : O_1 \rightarrow O_2$ が存在し、

$$\forall x \in O_1 \quad F(x, g(x)) = 0$$

を充たす。さらに O_1 を十分小さく取れば $(D_y F)(x, g(x))$ が常に可逆行列となり g の微分について

$$(Dg)(x) = -(D_y F)(x, g(x))^{-1}((D_x F)(x, g(x)))$$

となる。

証明. 以下 $L = (D_y F)(x_0, y_0)$ と置き、 $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ を

$$\Phi(x, y) = y - L^{-1}F(x, y)$$

と定義する。明らかに Φ は連続である。 $\Phi(x, y) = \Phi_x(y)$ としばしば書き表すことにする。さて

$$\begin{aligned} |\Phi_x(y_1) - \Phi_x(y_2)| &= |y_1 - L^{-1}F(x, y_1) - y_2 + L^{-1}F(x, y_2)| \\ &= |L^{-1}(F(x, y_2) - F(x, y_1) - L(y_2 - y_1))| \\ &\leq |L^{-1}| |F(x, y_2) - F(x, y_1) - L(y_2 - y_1)| \\ &= |L^{-1}| \left| e \left(\begin{pmatrix} x \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \right| \end{aligned}$$

となる。ここで $|L^{-1}|$ は L^{-1} の作用素ノルムである。先の補題より、 $\varepsilon > 0$ を任意に与えたとき α を十分小さく取れば

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| < \alpha, \quad \left| \begin{pmatrix} x \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| < \alpha$$

ならば

$$\left| e \left(\begin{pmatrix} x \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \right| \leq \varepsilon \left| \begin{pmatrix} x \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y_2 \end{pmatrix} \right| = \varepsilon |y_1 - y_2|$$

となる。さて δ_1, η を十分小さく取れば

$$|x - x_0| < \delta_1 \quad |y_1 - y_0| \leq \eta \quad |y_2 - y_0| \leq \eta$$

ならば

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| < \alpha, \quad \left| \begin{pmatrix} x \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| < \alpha$$

とできるので結局 $\varepsilon > 0$ をよしなに定めて

$$|x - x_0| < \delta_1 \quad |y_1 - y_0| \leq \eta \quad |y_2 - y_0| \leq \eta$$

ならば

$$\left| e \left(\begin{pmatrix} x \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \right| \leq \frac{1}{2} |y_1 - y_2|$$

となる。さらに Φ は連続なので δ_2 を十分小さく取れば

$$|x - x_0| < \delta_2$$

ならば

$$|\Phi(x, y_0) - \Phi(x_0, y_0)| < \frac{\eta}{2}$$

とできる。以上から結局 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ と置けば

$$|x - x_0| < \delta_1 \quad |y_1 - y_0| \leq \eta \quad |y_2 - y_0| \leq \eta \implies |\Phi_x(y_1) - \Phi_x(y_2)| \leq \frac{1}{2}|y_1 - y_2|$$

かつ

$$|\Phi(x, y_0) - \Phi(x_0, y_0)| < \frac{\eta}{2}$$

となる。更に δ, η を十分小さく取れば $O_1 = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}, O_2 = \{y \mid |y - y_0| < \eta\} A = \bar{O}_2 = \{y \mid |y - y_0| \leq \eta\}$ として

$$O_1 \times A \subset U$$

とできる。さて、 Φ を

$$\Phi : O_1 \times A \rightarrow \mathbb{R}^m$$

とみなす。すると先に述べたことと $F(x_0, y_0) = 0$ から $\Phi(x_0, y_0) = y_0$ となることから

$$\begin{aligned} |\Phi_x(y) - y_0| &= |\Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0)| \\ &\leq |\Phi(x, y) - \Phi(x, y_0)| + |\Phi(x, y_0) - \Phi(x_0, y_0)| \\ &< \frac{1}{2}|y - y_0| + \frac{\eta}{2} \leq \eta \end{aligned}$$

よって $\Phi(x, y) \in A$ であり Φ は

$$\Phi : O_1 \times A \rightarrow A$$

とみなせる。さて A は有界で完備な距離空間であり、 Φ は

$$|\Phi_x(y_1) - \Phi_x(y_2)| \leq \frac{1}{2}|y_1 - y_2|$$

を満たすのでパラメータ付きのバナッハの不動点定理の仮定を満足し連続関数 $g : O_1 \rightarrow A$ で

$$\Phi_x(g(x)) = g(x)$$

を満たすものが存在する。 $\Phi(x, y) = y - L^{-1}F(x, y)$ なので

$$\Phi_x(g(x)) = g(x) \iff F(x, g(x)) = 0$$

である。さらに

$$\begin{aligned} |\Phi_x(y) - y_0| &= |\Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0)| \\ &\leq |\Phi(x, y) - \Phi(x, y_0)| + |\Phi(x, y_0) - \Phi(x_0, y_0)| \\ &< \frac{1}{2}|y - y_0| + \frac{\eta}{2} \leq \eta \end{aligned}$$

の計算から $|g(x) - y_0| < \eta$ であるから g は $g : O_1 \rightarrow O_2$ とみなせこのような g は唯一存在する。これで定理の前半が示された。

後半の微分可能性を示そう。 $\{(x, y) \in U \mid \det(D_y F)(x, y) \neq 0\}$ は開集合なので O_1, O_2 を小さく取れば $(D_y F)(x, y)$ が可逆になるのはわかる。さて $x \in O_1$ を任意に与え $y_1 = g(x_1)$ と置き、

$$A = (D_x F)(x_1, y_1), \quad B = (D_y F)(x, y)$$

と置く。 $F(x_1, y_1) = F(x_1, g(x_1)) = 0$ で F はもちろん任意の $(x, y) \in U$ で全微分可能なので

$$(1) \quad F(x, y) = A(x - x_1) + B(y - y_1) + e \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)$$

で

$$(2) \quad \lim_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}} \frac{e \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)}{\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right|} = 0$$

である。よって ρ を十分小さく取れば $|x - x_1| \leq \rho, |y - y_1| \leq \rho$ ならば

$$(3) \quad e \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) \leq \frac{1}{2|L^{-1}|} (|x - x_1| + |y - y_1|)$$

である。(1) に於いて $y = g(x)$ と置き変形すると

$$(4) \quad g(x) - g(x_1) = -B^{-1}A(x - x_1) + B^{-1}e$$

である。(3) から

$$(5) \quad |e| \leq \frac{1}{2|B^{-1}|} (|x - x_1| + |g(x) - g(x_1)|)$$

で (4) から

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_1)| &\leq |B^{-1}A| |x - x_1| + |B^{-1}| |e| \\ &\leq |B^{-1}A| |x - x_1| + \frac{1}{2} |x - x_1| + \frac{1}{2} |g(x) - g(x_1)| \end{aligned}$$

よって

$$(6) \quad |g(x) - g(x_1)| \leq C |x - x_1| \quad (C = |B^{-1}A| + 1)$$

を得る。 $|(x, y)| = \max(|x|, |y|)$ と後出しで決めておけば (ほかのノルムでもどうせ同様である。わかりやすさのためにこう記しておく)

$$\lim_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}} \frac{e \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)}{\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right|} = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{e}{|x - x_1|} = 0$$

を得る。よって (4) から

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{|g(x) - g(x_1) + B^{-1}A(x - x_1)|}{|x - x_1|} = 0$$

つまり g は x_1 で全微分可能で

$$(Dg)(x_1) = -(D_y F)(x_1, g(x_1))^{-1} ((D_x F)(x_1, g(x_1)))$$

となる。 x_1 は任意なのでこれで証明がすべて完結した。 □

ちなみに陰関数定理はバナッハ空間でも適切な補正で成り立つ。

参考文献

- [1] ユルゲン・ヨスト著, 小谷元子訳, ポストモダン解析学, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2000