

リース-マルコフ-角谷の表現定理

電波通信

2018 年 8 月 2 日

この文章では局所コンパクトハウスドルフ空間上の実数値関数の線型形式と測度の関係を物語るリース-マルコフ-角谷の表現定理を証明する。この文章では位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ のコンパクト集合全体を記号 $\text{Cpt}(X)$ で表すことにする。 $\mathfrak{O}$ はもちろん開集合系である。また $\mathfrak{P}(X)$ で X の冪集合を表す。 $\mathfrak{P}$ は P のフラクトゥールである。Power の P である。またこの文章では、 $\mathbb{N}$ は 0 を含めないものとする。つまり 1 から始まる。しかし証明の step は -1 から始まる。悪しからず。
証明は全部で 16step あるが各 step ひとつひとつは難しくない。証明のアイデアはシンプルだが、証明がやたらに長いだけである。長さに心を脅かされないで欲しい。

-1 位相からの準備

定義 1 (関数の台). 位相空間 X 上の実連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ について、 f の台 (サポート) $\text{supp} f$ を

$$\text{supp} f = \text{CL}\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

と定義する。閉包をとっていることに注意しよう。台は常に閉集合である。

台がコンパクトな関数はコンパクト台、もしくはコンパクトサポートを持つという。

定理 2 (局所コンパクトハウスドルフ空間上のウリゾーンの補題). 局所コンパクトハウスドルフ空間の互いに交わらないコンパクト集合 K と閉集合 F は実連続関数で分離できる。更にその連続関数のコドメインは $[0, 1]$ に取れる。

証明. 空間を 1 点コンパクト化してもわかるし、一般に完全正則空間はこの性質をもつことからわかる。局所コンパクトハウスドルフ空間は完全正則なのである。もしくは以下で述べる局所コンパクトハウスドルフ空間のコンパクト集合上の単位の分割からもわかる。□

以下の三つの単位の分割に関する定理はこの文章では証明しない。電波通信の該当する記事を見て欲しい。

定理 3 (コンパクトハウスドルフ空間上の単位の分割). コンパクトハウスドルフ空間 X の有限開被覆 $\{U_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ について実連続関数の族 $\{f_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が存在して以下を充たす。

$$\begin{aligned} \text{supp} f_k &\subset U_k \\ 0 &\leq f_k \leq 1 \\ \sum_{k=1}^n f_k &\equiv 1 \end{aligned}$$

定理 3 の系として次のものがある。

系 4 (局所コンパクトハウスドルフ空間のコンパクト集合上の単位の分割). 局所コンパクトハウスドルフ空間 X のコンパクト集合 K と有限個の開集合の族 $\{U_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$$

を満たしてとする。このとき実連続関数の族 $\{f_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が存在して以下を満たす。

$$\begin{aligned} \text{supp} f_k &\subset U_k \\ 0 &\leq f_k \leq 1 \\ \forall x \in K \quad \sum_{k=1}^n f_k(x) &\equiv 1 \end{aligned}$$

このような関数族 $\{f_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ を開被覆 $\{U_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ に従属する K 上の単位の分割という。

また、系 3 を改良して単位の分割がコンパクト台を持つようにできる。

定理 5 (局所コンパクトハウスドルフ空間のコンパクト集合上のコンパクトサポートな単位の分割). 局所コンパクトハウスドルフ空間 X のコンパクト集合 K と有限個の開集合の族 $\{U_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$$

を満たしてとする。このとき実連続関数の族 $\{f_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が存在して以下を満たす。

$$\begin{aligned} \text{各 } \text{supp} f_k &\text{ はコンパクト} \\ \text{supp} f_k &\subset U_k \\ 0 &\leq f_k \leq 1 \\ \forall x \in K \quad \sum_{k=1}^n f_k(x) &\equiv 1 \end{aligned}$$

このような関数族 $\{f_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ を開被覆 $\{U_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ に従属する K 上のコンパクト台を持つ単位の分割という。

0 定理と証明

定義 6. 局所コンパクトハウスドルフ空間上の台がコンパクトな実連続関数全体を

$$C_c(X)$$

で表す。更に $C_c(X)$ の元の内、常に正の値を取る関数全体を

$$C_c^+(X)$$

と表す。つまり

$$C_c^+(X) = \{f \mid f \in C_c(X) \ f \geq 0\}$$

である。

定義 7 (正值線型形式). $C_c(X)$ 上の線型形式とは線形写像

$$\Lambda : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

のことであるが、線型形式のうち

$$\forall f \in C_c^+(X) \quad \Lambda f \geq 0$$

を満たす Λ を X 上の正值線型形式という。また $g \geq f$ なら $g - f \geq 0$ から

$$\Lambda g = \Lambda(f + g - f) = \Lambda f + \Lambda(g - f) \geq \Lambda f$$

つまり

$$g \geq f \implies \Lambda g \geq \Lambda f$$

となるから正值線型形式とは単調な線型形式と言っても良い

定義 8 (内部正則性、外部正則性). $(X, \mathfrak{D})$ が位相空間とし、更に測度空間 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ が $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{M}$ を満たすとする。この仮定のもと X の可測集合 E が

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid V \in \mathfrak{D} \ E \subset V\}$$

を満たすとき E は外部正則であるという。また E が

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \in \text{Cpt}(X) \ K \subset E\}$$

を満たすとき E は内部正則であるという。

定理 9 (Riesz-Markov-角谷の表現定理). 局所コンパクトハウスドルフ空間 $(X, \mathfrak{D})$ 上の関数空間 $C_c(X)$ 上の正值線型形式 Λ が与えられたときこの Λ に対して X 上の σ 加法族 $\mathfrak{M}$ と $(X, \mathfrak{M})$ 上の測度 μ が存在して以下を満たす。

(1)

$$\mathfrak{B}(X) \subset \mathfrak{M}$$

(2)

$$\forall K \in \text{Cpt}(X) \quad \mu(K) < \infty$$

(3)

$$\forall E \in \mathfrak{M} \quad E \text{ は外部正則つまり}$$

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid V \in \mathfrak{D} \ E \subset V\}$$

(4)

$$E \in \mathfrak{M} \text{ が開集合、もしくは } \mu(E) < \infty \text{ ならば } E \text{ は内部正則つまり}$$

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \in \text{Cpt}(X) \ K \subset E\}$$

(5)

$$E \in \mathfrak{M} \ F \subset E \quad \mu(E) = 0 \text{ ならば } F \in \mathfrak{M} \text{ つまり測度空間 } (X, \mathfrak{M}, \mu) \text{ は完備}$$

(6)

$$\forall f \in C_c(X) \quad \Lambda f = \int_X f \, d\mu$$

ここで $\mathfrak{B}(X)$ は位相空間 $(X, \mathfrak{D})$ のボレル集合族を表す。さらに $(X, \mathfrak{M})$ 上のこのような測度は一意的である。

証明

step -1 (準備). 証明で用いる関数や集合を定義する。まず $f \in C_c^+(X)$ が

$$f \leq \chi_V$$

を満たすとき

$$f \prec V$$

と書くことにする。更に $f \in C_c^+(X)$ が

$$\chi_K \leq f$$

を満たすとき

$$K \prec f$$

と書くことにする。 $\prec$ は普通の二項関係では無いことに注意しよう。ここで χ_A で A の特性関数を表した。さて $V \in \mathfrak{D}$ について

$$\mu(V) = \sup\{\Lambda f \mid f \prec V, f \in C_c^+(X)\}$$

と定義する。 μ は写像 $\mu: \mathfrak{D} \rightarrow [0, +\infty]$ であり、定義から明らかに

$$U \subset V \implies \mu(U) \leq \mu(V)$$

である。次のようにして μ の定義域を $\mathfrak{P}(X)$ まで拡張する。 $E \in \mathfrak{P}(X)$ について

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid V \in \mathfrak{D}, E \subset V\}$$

と定義する。 $U, V \in \mathfrak{D}$, $U \subset V \implies \mu(U) \leq \mu(V)$ から一般の $E \in \mathfrak{P}(X)$ で定義された μ は $V \in \mathfrak{D}$ に対する $\mu(V)$ とちゃんと両立している。また、定義からすぐわかるように $E, F \in \mathfrak{P}(X)$ について

$$E \subset F \implies \mu(E) \leq \mu(F)$$

となる。これを μ の単調性と呼ぼう。さて加法族や測度すら構成していないが呼び名が無いのも不便なので $E \in \mathfrak{P}(X)$ が

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \in \text{Cpt}(X), K \subset E\}$$

を満たしているとき内部正則性を持つ、または内部正則であるということにしよう。この語は正式には加法族を定義した後に使うべきだが、証明の中で呼び名がないのが本当に不便だけである。そして

$$\mathfrak{M}_F = \{E \in \mathfrak{P}(X) \mid \mu(E) < \infty, E \text{ は内部正則}\}$$

と定義し、この $\mathfrak{M}_F$ を用いて

$$\mathfrak{M} = \{E \in \mathfrak{P}(X) \mid \forall K \in \text{Cpt}(X), E \cap K \in \mathfrak{M}_F\}$$

と定義する。 μ の単調性から $E \in \mathfrak{M}$ のとき $F \subset E$ で $\mu(E) = 0$ ならば $F \in \mathfrak{M}$ がわかる。よって定理の (5) の性質が確認された。

step 0 (step 1 のための主張: 開集合に対する劣加法性). $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{D}$ のとき

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i)$$

証明. 簡単のために $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ と置く。 $\alpha < \mu(V)$ となる任意の α を取ると $\mu(V)$ の定義から

$$\alpha < \Lambda f, f \prec V$$

となる $f \in C_c^+(X)$ が存在する。さて $K = \text{supp} f$ と置くと $K \in \text{Cpt}(X)$ で $K \subset V$ であるので $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の中から有限個選んで K を被覆できる。必要なら番号付けを変えて

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$$

として良い。定理 5[局所コンパクトハウスドルフ空間上の台がコンパクトな単位の分割] より $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ に従属する K 上の台がコンパクトな 1 の分割 $\{h_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ が存在する。これについて $h_i \prec V_i$ と $0 \leq f \leq 1$ から

$$f = \sum_{i=1}^n h_i f$$

及び

$$h_i f \leq h_i$$

が成り立つので、 $h_i \prec V_i$ と $\mu(V_i)$ の定義とを合わせて

$$\alpha < \Lambda f = \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n \Lambda h_i \leq \sum_{i=1}^n \mu(V_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i)$$

を得る。つまり

$$\alpha < \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i)$$

なので α の任意性から

$$\mu(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i)$$

が分かる。 □

step 1 (劣加法性). $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{P}(X)$ に対し

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

証明. ある番号 i について $\mu(E_i) = \infty$ ならば μ の単調性から

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = +\infty, \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = +\infty$$

となるので不等式は成立する。

$\forall i \in \mathbb{N} \mu(E_i) < \infty$ のときを考えよう。このとき $\mu(E_i)$ の定義から任意の $\varepsilon > 0$ を与えたとき各 i について

$$\mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

となる開集合 V_i が存在する。そして

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$$

なので先の主張と μ の単調性から

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon$$

を得て、 ε は任意であったので結局

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

が成り立つ。 □

step 2 ($\mathfrak{M}_F$ と $\text{Cpt}(X)$ の関係). $\forall K \in \text{Cpt}(X)$ $\mu(K) < \infty$ が成り立つ。更に $\mu(K) = \inf\{\Lambda f \mid f \in C_c^+(X) \text{ } K \prec f\}$ が成り立ち、特に $K \in \mathfrak{M}_F$ が成り立つ。つまり $\text{Cpt}(X) \subset \mathfrak{M}_F$

証明. $f \in C_c^+(X)$ を $K \prec f$ とする。そして $1 < \alpha$ を任意に与え

$$V_\alpha = \{x \mid 1 < \alpha f(x)\}$$

と定義すると V_α は開集合で $K \subset V_\alpha$ となる。ここで $\mu(V_\alpha)$ を使いたいがために $g \prec V_\alpha$ となる $g \in C_c^+(X)$ を任意に与えるともちろん

$$g(x) \leq \chi_{V_\alpha}(x)$$

であり、 V_α 上 $1 < \alpha f$ なので $\chi_{V_\alpha} < \alpha f$ が成り立つので

$$\forall x \in X \quad g(x) < \alpha f(x)$$

を得る。よって

$$\Lambda g \leq \Lambda(\alpha f) = \alpha \Lambda f$$

を得る。そして g は任意だったので、 μ の単調性と合わせて

$$\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) = \sup\{\Lambda g \mid g \in C_c^+(X), g \prec V_\alpha\} \leq \alpha \Lambda f$$

が分かる。ゆえに任意の $\alpha \in (1, +\infty)$ について

$$\mu(K) \leq \alpha \Lambda f$$

が成り立ち、 $\alpha \downarrow 1$ とすれば

$$\mu(K) \leq \Lambda f$$

を得て、 $\Lambda f < \infty$ なので、 $\mu(K) < \infty$ ということが分かった。

さて、 $\mu(K)$ は有限の値であることがわかったので $\varepsilon > 0$ を任意に与えたとき μ の定義から

$$\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon, \quad K \subset V$$

となる開集合 V が存在する。ウリゾーンの補題の補題から $K \prec f \prec V$ となる f が存在するが、 $\mu(V)$ の定義から

$$\Lambda f \leq \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$$

となる。結局

$$\forall \varepsilon > 0 \exists f \in C_c^+(X) (K \prec f) \wedge (\Lambda f < \mu(K) + \varepsilon)$$

が成立するが、これはつまり

$$\mu(K) = \inf\{\Lambda f \mid f \in C_c^+(X) K \prec f\}$$

が成り立つということである。 □

step 3 (開集合の内部正則性). $V \in \mathfrak{O}$ ならば V は内部正則である。よって特に $\mu(V) < \infty$ ならば $V \in \mathfrak{M}_F$

証明. $\alpha < \mu(V)$ となる任意の α を与えると $f \in C_c^+(X)$ が存在して

$$f \prec V, \alpha < \Lambda f \leq \mu(V)$$

となる。さて $K = \text{supp} f$ と置く。このとき $K \prec g$ となる任意の $g \in C_c^+(X)$ について $f \leq g$ なので

$$\Lambda f \leq \Lambda g$$

そして $K \prec g$ となる g で下限を取ると先の step2[$\mathfrak{M}_F$ と $\text{Cpt}(X)$ の関係] より

$$\mu(K) = \inf\{\Lambda g \mid g \in C_c^+(X) K \prec g\}$$

なので

$$\alpha < \Lambda f \leq \mu(K)$$

つまり

$$\alpha < \mu(K)$$

が成り立つ。そして α は任意で $K \subset V$ であったので結局

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) \mid K \in \text{Cpt}(X), K \subset V\}$$

が成立する。 □

step 4 (**step 5** のための主張). $K_1, K_2 \in \text{Cpt}(X)$ が互いに素なとき

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$$

が成立する。

証明. step1[劣加法性] より

$$\mu(K_1 \cup K_2) \leq \mu(K_1) + \mu(K_2)$$

である。以下逆向きの評価を示す。 $K = K_1 \cup K_2$ と置き、step2[$\mathfrak{M}_F$ と $\text{Cpt}(X)$ の関係] を踏まえて $K \prec f$ となる任意の $f \in C_c^+(X)$ を取る。 $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ と定理 2[ウリゾーンの補題] から連続関数 $g : X \rightarrow [0, 1]$ が存在して

$$g|_{K_1} \equiv 1, g|_{K_2} \equiv 0, g \in C_c^+(X)$$

を充たす。この g を用いると

$$f = gf + (1 - g)f, K_1 \prec gf, K_2 \prec (1 - g)f$$

となり、 f がコンパクト台を持つことから、 gf と $(1-g)f$ もコンパクト台を持つ。そして $\text{step2}[\mathfrak{M}_F$ と $\text{Cpt}(X)$ の関係] より

$$\Lambda f = \Lambda(gf) + \Lambda((1-g)f) \geq \mu(K_1) + \mu(K_2)$$

つまり

$$\Lambda f \geq \mu(K_1) + \mu(K_2)$$

であり、 f の任意性と、再び $\text{step2}[\mathfrak{M}_F$ と $\text{Cpt}(X)$ の関係] から

$$\mu(K) \geq \mu(K_1) + \mu(K_2)$$

が成り立つ。 □

step 5 ($\mathfrak{M}_F$ での完全加法性). $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}_F$ が互いに素な族のとき

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

が成り立つ。そして特に $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) < \infty$ ならば $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathfrak{M}_F$ である。

証明. $\mu(E_i) < \infty$ に注意しよう。まず $E_i \in \mathfrak{M}_F$ なので任意の $\varepsilon > 0$ を与えると、内部正則性から各 E_i 毎に

$$H_i \subset E_i \quad \mu(H_i) > \mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}$$

となる $H_i \in \text{Cpt}(X)$ が存在する。 $\{E_i\}$ が互いに素なので $\{H_i\}$ も互いに素で $K_n = \bigcup_{i=1}^n H_i$ と置くと先の step4 を繰り返し用いて

$$\mu(K_n) = \sum_{i=1}^n \mu(H_i)$$

を得る。さて $K_n \subset E$ なので、 μ の単調性から

$$\mu(E) \geq \mu(K_n) = \sum_{i=1}^n \mu(H_i) > \sum_{i=1}^n \mu(E_i) - \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^i} > \sum_{i=1}^n \mu(E_i) - \varepsilon$$

つまり

$$\mu(E) \geq \sum_{i=1}^n \mu(E_i) - \varepsilon$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ。 ε は任意なので

$$\mu(E) \geq \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ。そして $n \rightarrow \infty$ として

$$\mu(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

を得る。逆向きの不等式は step1 [劣加法性] から得られるので結局

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

が得られてこの step5 の前半が示された。以下後半を示す。

$\mu(E) < \infty$ ならば

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$$

より、任意に $\varepsilon > 0$ を与えたときに番号を十分大きく取れば、

$$\mu(E) < \sum_{i=1}^n \mu(E_i) + \varepsilon < \mu(K_n) + 2\varepsilon$$

で^{*1} $K_n \subset E$ かつ、 K_n はコンパクトなので結局

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \in \text{Cpt}(X) \ K \subset E\}$$

が得られる。よって $E \in \mathfrak{M}_F$ となる。 □

step 6 (内側と外側からの近似)。以下は同値

- (1) $E \in \mathfrak{M}_F$
(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \text{Cpt}(X) \ \exists V \in \mathfrak{D} \ (K \subset E \subset V) \wedge (\mu(V \setminus K) < \varepsilon)$

証明. [(1) $\implies$ (2)]

$\mu(E)$ の定義から $\frac{\varepsilon}{2}$ に対して $E \subset V$ となる $V \in \mathfrak{D}$ が存在して

$$\mu(V) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(E)$$

を充たす。ここで $\mu(V) < \infty$ に注意せよ。そして $E \in \mathfrak{M}_F$ から内部正則性により $\frac{\varepsilon}{2}$ に対して $K \subset E$ となる $K \in \text{Cpt}(X)$ が存在して

$$\mu(E) < \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2}$$

を充たす。 $K \subset E \subset V$ に注意せよ。そして $V \setminus K$ は開集合で $\mu(V \setminus K) \leq \mu(V) < \infty$ なので step3[開集合の内部正則性] より $V \setminus K \in \mathfrak{M}_F$ そして step2[$\mathfrak{M}_F$ と $\text{Cpt}(X)$ の関係] より $K \in \mathfrak{M}_F$ なので step5[$\mathfrak{M}_F$ 上の完全加法的性] より

$$\mu(V) = \mu(V \setminus K) + \mu(K)$$

が成り立つ。つまり

$$\mu(V \setminus K) = \mu(V) - \mu(K)$$

である。そして $\mu(V) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(E)$, $\mu(E) < \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2}$ より

$$\mu(V \setminus K) = \mu(V) - \mu(K) < \frac{\varepsilon}{2} + \mu(E) - \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

なので (2) が結論される。

[(1) $\implies$ (2) の証明終わり]

[(2) $\implies$ (1)]

(2) と step1[劣加法的性] と step2[$\mu(K)$ の有限性] から

$$\mu(E) \leq \mu(V) \leq \mu(V \setminus K) + \mu(K) < \varepsilon + \mu(K) < \infty$$

^{*1} $\mu(E) = \infty$ ならばこの不等式は成り立たない

が成立するので $\mu(E) < \infty$ そして任意に $\varepsilon > 0$ を与えたとき (2) の条件を充たす K, V が存在して step1[劣加法性] と μ の単調性から

$$\mu(E) \leq \mu(E \setminus K) + \mu(K) \leq \mu(V \setminus K) + \mu(K) < \varepsilon + \mu(K)$$

が成り立つが、これは内部正則性

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \in \text{Cpt}(X) \ K \subset E\}$$

が成り立つことを示している。よって $E \in \mathfrak{M}_F$

[(2) $\implies$ (1) の証明終わり]

□

step 7 ($\mathfrak{M}_F$ の有限加法性). $A, B \in \mathfrak{M}_F \implies A \setminus B, A \cup B, A \cap B \in \mathfrak{M}_F$

証明. step6[内側と外側からの近似] を利用する。 $A, B \in \mathfrak{M}_F$ とする。任意に $\varepsilon > 0$ を与えたときに step6 より

$$K \subset A \subset U, \mu(U \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$L \subset B \subset V, \mu(V \setminus L) < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる $K, L \in \text{Cpt}(X)$ 及び $U, V \in \mathfrak{D}$ が存在する。さて $A \setminus B = A \cap B^c$ なので

$$K \cap V^c \subset A \setminus B \subset U \cap L^c$$

となり $C = K \cap V^c, O = U \cap L^c$ と置くと $(C, O) \in \text{Cpt}(X) \times \mathfrak{D}$ でそして

$$\begin{aligned} O \setminus C &= (U \cap L^c) \setminus (K \cap V^c) = (U \cap L^c) \cap (K^c \cup V) \\ &= (U \cap L^c \cap K^c) \cup (U \cap V \cap L^c) \end{aligned}$$

ところで

$$U \cap L^c \cap K^c \subset U \cap K^c = U \setminus K$$

$$U \cap V \cap L^c \subset V \cap L^c = V \setminus L$$

なので結局

$$O \setminus C \subset (U \setminus K) \cup (V \setminus L)$$

が成り立ち、そして step1[劣加法性] より

$$\mu(O \setminus C) \leq \mu(U \setminus K) + \mu(V \setminus L) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が分かる。故に step6[内側と外側からの近似] から $A \setminus B \in \mathfrak{M}_F$ となる。さらに

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B \text{ (直和)}$$

なので証明の前半と step5[$\mathfrak{M}_F$ 上の完全加法性] より $A \cup B \in \mathfrak{M}_F$ がわかり、さらに

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$$

なので証明の前半より $A \cap B \in \mathfrak{M}_F$ が分かる。

□

step 8 ($\mathfrak{M}_F$ と $\mathfrak{M}$ の関係). $\mathfrak{M}_F \subset \mathfrak{M}$ が成立する。

証明. $E \in \mathfrak{M}_F$ とする。step2[$\mathfrak{M}_F$ と $\text{Cpt}(X)$ の関係] から $\text{Cpt}(X) \subset \mathfrak{M}_F$ なので step7[$\mathfrak{M}_F$ の有限加法性] より $E \cap K \in \mathfrak{M}_F$ よって $\mathfrak{M}$ の定義から $E \in \mathfrak{M}$ つまり $\mathfrak{M}_F \subset \mathfrak{M}$ $\square$

step 9 ($\mathfrak{M}$ の σ 加法性). $\mathfrak{M}$ は σ 加法族

証明. $A \in \mathfrak{M}$ とすると任意の $K \in \text{Cpt}(X)$ について $A \cap K, K \in \mathfrak{M}_F$ なので step7[$\mathfrak{M}_F$ の有限加法性] から $A^c \cap K = K \setminus (A \cap K) \in \mathfrak{M}_F$ である。 $K \in \text{Cpt}(X)$ は任意だったので $A^c \in \mathfrak{M}$ つまり

$$A \in \mathfrak{M} \implies A^c \in \mathfrak{M}$$

さて次に $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$ について $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を考える。任意の $K \in \text{Cpt}(X)$ について、各 $i \in \mathbb{N}$ につき、 $A_i \cap K \in \mathfrak{M}_F$ である。ここで $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}_F$ を帰納的に

$$B_1 = A_1 \cap K, B_n = (A_n \cap K) \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{n-1})$$

と定義する。step7[$\mathfrak{M}_F$ の有限加法性] から確かに各 n について $B_n \in \mathfrak{M}_F$ である。そして定義から明らかに $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は互いに素な族で

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = A \cap K$$

が成り立ち、 μ の単調性から $\mu(A \cap K) \leq \mu(K) < \infty$ なので step5[$\mathfrak{M}_F$ 上の完全加法性] から $A \cap K \in \mathfrak{M}_F$ となる。よって $K \in \text{Cpt}(X)$ の任意性と $\mathfrak{M}$ の定義から $A \in \mathfrak{M}$ が分かり、つまり

$$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$$

となる。以上から $\mathfrak{M}$ は σ 加法族であることがわかる。 $\square$

step 10 (Borel 性). $\mathfrak{M}$ は X のボレル集合を全て含む。

証明. A を X の任意の閉集合とすると任意の $K \in \text{Cpt}(X)$ について $A \cap K$ はコンパクト集合である。よって step2[$\mathfrak{M}_F$ と $\text{Cpt}(X)$ の関係] から $A \cap K \in \mathfrak{M}_F$ となり $\mathfrak{M}$ の定義から $A \in \mathfrak{M}$ となる。以上から $\mathfrak{M}$ は X の全ての閉集合を含んでいる。step9 より $\mathfrak{M}$ は σ 加法族なので $\mathfrak{M}$ は X のボレル集合を全て含んでいる。 $\square$

step 11 ($\mathfrak{M}_F$ の正体). $\mathfrak{M}_F = \{E \in \mathfrak{P}(X) \mid E \in \mathfrak{M} \text{ かつ } \mu(E) < \infty\}$

証明. 見やすくするために $\mathfrak{N} = \{E \in \mathfrak{P}(X) \mid E \in \mathfrak{M} \text{ かつ } \mu(E) < \infty\}$ と置く。定義から明らかに $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ となることに注意せよ。

step8[$\mathfrak{M}_F$ と $\mathfrak{M}$ の関係] より $\mathfrak{M}_F \subset \mathfrak{M}$ で、 $\mathfrak{M}_F$ の定義から $E \in \mathfrak{M}_F$ ならば $\mu(E) < \infty$ なので

$$\mathfrak{M}_F \subset \mathfrak{N}$$

が分かる。以下逆向きの包含関係を示す。

$E \in \mathfrak{N}$ ならば $\mu(E) < \infty$ であるので μ の定義から $V \in \mathfrak{D}$ が存在し、

$$E \subset V, \mu(V) < \mu(E) + 1$$

を充たす。そして $\mu(E) < \infty$ より $\mu(V) < \infty$ なので step3[開集合の内部正則性] より $V \in \mathfrak{M}_F$ となる。さて $V \in \mathfrak{M}_F$ と step6[内側と外側からの近似] から任意に $\varepsilon > 0$ を与えると $K \in \text{Cpt}(X)$ が存在して

$$K \subset V, \mu(V \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$$

を充たす。そして $E \in \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ なので、 $\mathfrak{M}$ の定義からこの K について $E \cap K \in \mathfrak{M}_F$ なので内部正則性から $L \in \text{Cpt}(X)$ が存在して

$$L \subset E \cap K, \mu(E \cap K) < \mu(L) + \frac{\varepsilon}{2}$$

となる。さて、 $E \subset V$ より $E \setminus K \subset V \setminus K$ なので

$$E = (E \cap K) \cup (E \cap K^c) \subset (E \cap K) \cup (V \setminus K)$$

となり、

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V \setminus K) < \mu(L) + \varepsilon$$

が従う。つまり

$$\forall \varepsilon > 0 \exists L \in \text{Cpt}(X) \mu(E) < \mu(L) + \varepsilon$$

が成り立ち、これは E が内部正則となることを示している。よって $E \in \mathfrak{M}_F$ つまり $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_F$ となる。

以上から $\mathfrak{M}_F = \mathfrak{N}$ がわかる。 □

step 12 (測度). μ は $\mathfrak{M}$ 上の測度である。

証明.

$$\mu(\emptyset) = 0$$

は定義からすぐにわかる。完全加法性については、互いに素な族 $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$ を考えるとき、ある番号 n で $\mu(E_n) = \infty$ ならば明らかに

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \infty$$

で $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \supset E_n$ と μ の単調性から

$$\mu(E) = \infty$$

なので

$$\mu(E) = \infty = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

となる。すべての番号で $\mu(E_i) < \infty$ ならば step11[$\mathfrak{M}_F$ の正体] から $\{E_i\} \subset \mathfrak{M}_F$ であり、これと step5[$\mathfrak{M}_F$ 上の完全加法性] より

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

が成り立つので結局いづれにせよ μ の完全加法性は示された。 □

これまでの step で X 上に測度が構成された。あとは Λ と両立することと、一意性を示せばよい。

step 13 (Λ と μ の両立性). $\forall f \in C_c(X) \Lambda f = \int_X f d\mu$ が成立する。

証明.

$$\forall f \in C_c(X) \Lambda f \leq \int_X f d\mu$$

を示せば良い。なぜなら f の代わりに $-f$ を当てはめれば線形性から逆向きの不等式が得られるからである。以下この不等式を示す。

$f \in C_c(X)$ と $\varepsilon > 0$ を任意に与え $K = \text{supp} f$, $\text{Im} f \subset [a, b]$ と置く。そしてこの a, b と ε について

$$y_0 < a < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = b, \quad \forall i \quad y_i - y_{i-1} < \varepsilon$$

となる点列 $\{y_i\}_{i=0}^n$ を適当に一つ固定する。更にこの点列に対応して

$$E_i = \{x \in X \mid y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K$$

と定義すると、 f の連続性から $\{x \mid y_{i-1} < f(x) \leq y_i\}$ は X のボレル集合であるから各 E_i もボレル集合であり、結局 $E_i \in \mathfrak{M}$ となる。

また、定義から明らかに $\{E_i\}_{i=1}^n$ は互いに素で $\bigcup_{i=1}^n E_i = K$ であること及び

$$\mu(K) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$$

が成り立つことに注意せよ。

そして $E_i \subset K$ なので $\mu(E_i) < \infty$ であり、 μ の定義から各 E_i 毎に $V_i \in \mathfrak{D}$ が存在して

$$E_i \subset V_i, \quad \mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}$$

を充たす。 f が連続関数であることから $\{x \mid f(x) < y_i + \varepsilon\}$ は開集合で、 $E_i \subset \{x \in X \mid f(x) < y_i + \varepsilon\}$ となるから、必要なら V_i と $\{x \in X \mid f(x) < y_i + \varepsilon\}$ との共通部分を新たに V_i と名前を付け替えて、 V_i は更に付け加えて

$$E_i \subset V_i, \quad \mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}, \quad \forall x \in V_i \quad f(x) < y_i + \varepsilon$$

を充たすとしてもよい。さて明らかに

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$$

なので X が局所コンパクトハウスドルフ空間であることと定理 5[局所コンパクトハウスドルフ空間上の台がコンパクトな単位の分割] から台がコンパクトな実連続関数の族 $\{h_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ が存在して以下を充たす。

$$\begin{aligned} \text{supp} h_i &\subset V_i \\ 0 &\leq h_i \leq 1 \\ \forall x \in K \quad \sum_{i=1}^n h_i(x) &\equiv 1 \end{aligned}$$

そしてこの性質から

$$K \prec \sum_{i=1}^n h_i(x), \quad \forall i \quad h_i \prec V_i$$

がわかり、step2[$\mathfrak{M}_F$ と $\text{Cpt}(X)$ の関係] から

$$\mu(K) \leq \Lambda\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) = \sum_{i=1}^n \Lambda h_i$$

がわかる。そして $\text{supp} f = K$ から簡単に

$$f = \sum_{i=1}^n h_i f$$

が知れる。さらに $\forall x \in V_i \ f(x) < y_i + \varepsilon$ なので

$$h_i f \leq (y_i + \varepsilon) h_i$$

がわかり、 $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$ から $\forall x \in E_i \ y_i - \varepsilon < f(x)$ なので

$$(y_i - \varepsilon) \chi_{E_i} \leq \chi_{E_i} f(x)$$

がわかる。つまり

$$s := \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon) \chi_{E_i} \leq f$$

である。この s は単関数であり、

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon) \mu(E_i)$$

となる。そして $s \leq f$ なので積分の単調性から

$$\int_X s \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

が分かり、以上を合わせて

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon) \mu(E_i) \leq \int_X f \, d\mu$$

となることに留意せよ。

以上分かったことをふんだんに用いて目標の不等式を示す。まず $h_i f \leq (y_i + \varepsilon) h_i$ から

$$\Lambda f = \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) \Lambda(h_i) = \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \Lambda(h_i) - |a| \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i)$$

がわかる。そして $\mu(K) \leq \Lambda\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) = \sum_{i=1}^n \Lambda h_i$ から

$$\sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \Lambda(h_i) - |a| \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i) \leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \Lambda(h_i) - |a| \mu(K)$$

と得る。次に $h_i \prec V_i$ と開集合に対する μ の定義から $\Lambda h_i \leq \mu(V_i)$ なので $|a| + y_i + \varepsilon \geq 0$ に注意して

$$\sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \Lambda(h_i) - |a| \mu(K) \leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \mu(V_i) - |a| \mu(K)$$

を得る。 V_i の取り方から $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}$ が分かり、これと $|a| + y_i + \varepsilon \geq 0$ と $\mu(K) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$ に注意

して

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \mu(V_i) - |a| \mu(K) \leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) (\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}) - |a| \mu(K) \\
& = |a| \sum_{i=1}^n \mu(E_i) + \sum_{i=1}^n y_i \mu(E_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^n \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) - |a| \mu(K) \\
& = \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon) \mu(E_i) + 2\varepsilon \mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)
\end{aligned}$$

を得る。ここまでをまとめると

$$\Lambda f \leq \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon) \mu(E_i) + 2\varepsilon \mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)$$

である。この不等式の右辺を更に評価しよう。 $y_i \leq b$ から $\sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \leq \sum_{i=1}^n (|a| + b + \varepsilon) = n(|a| + b + \varepsilon)$

である。 $|a| + b + \varepsilon \geq 0$ に注意せよ。そして留意しておいた $\sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon) \mu(E_i) \leq \int_X f d\mu$ から

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon) \mu(E_i) + 2\varepsilon \mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \leq \int_X f d\mu + \varepsilon(2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon)$$

なので結局

$$\Lambda f \leq \int_X f d\mu + \varepsilon(2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon)$$

を得る。 $\varepsilon > 0$ は任意だったので結局

$$\Lambda f \leq \int_X f d\mu$$

が分かる。 □

step 14 (測度の一意性). 可測空間 $(X, \mathfrak{M})$ 上で定理の条件を満たす二つの測度 μ, ν を与える。任意の $E \in \mathfrak{M}$ は外部正則なので開集合の上で μ と ν が一致していれば $\mathfrak{M}$ 上でも一致するが、任意の開集合は内部正則なので、結局 $\text{Cpt}(X)$ 上で μ, ν が一致していれば $\mathfrak{M}$ 上一致する。以下 $\text{Cpt}(X)$ 上二つの測度が一致することを示す。

$K \in \text{Cpt}(X)$ を任意に与える。すると外部正則性から任意に ε を与えると

$$K \subset V, \mu(V \setminus K) = \mu(V) - \mu(K) < \varepsilon$$

となる $V \in \mathfrak{O}$ が存在する。そしてウリゾーンの補題から $K \prec f \prec V$ となる関数 $f \in C_c^+(X)$ が存在する。このとき $\chi_K \leq f \leq \chi_V$ なので積分の単調性から

$$\int_X f d\mu \leq \int_X \chi_V d\mu = \mu(V)$$

となり、 V の取り方から $\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$ なので結局

$$\int_X f d\mu < \mu(K) + \varepsilon$$

を得る。さて

$$\int_X f \, d\mu = \Lambda f = \int_X f \, d\nu$$

なので $\chi_K \leq f$ から

$$\nu(K) \leq \int_X f \, d\nu = \Lambda f$$

が分かる。以上から

$$\nu(K) \leq \Lambda f < \mu(K) + \varepsilon$$

を得るが $\varepsilon > 0$ は任意だったので

$$\nu(K) \leq \mu(K)$$

を得る。 ν, μ の役割を入れ替えて逆向きの不等式も得られるので

$$\forall K \in \text{Cpt}(X) \quad \nu(K) = \mu(K)$$

がわかる。よって一意性が確かめられた。

以上によりリース-マルコフ-角谷の表現定理の証明は終わった。□

注意. $C_c(X)$ 上の正値線形形式は $C_c^+(X)$ 上だけで完全に決定されることに注意しよう。つまり $C_c^+(X)$ 上の関数 $I : C_c^+(X) \rightarrow \mathbb{R}$ が

- (1) $\forall f \in C_c^+(X) \quad If \geq 0$
- (2) $\forall f, g \in C_c^+(X) \quad I(f+g) = If + Ig$
- (3) $\forall a \in [0, +\infty) \quad \forall f \in C_c^+(X) \quad I(af) = aI(f)$

を満たすならば I は $C_c(X)$ 上に正値線形形式に一意的に拡張されるのである。

$f \in C_c(X)$ について $f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = \max(-f, 0)$ としたときに $f = f_+ - f_-$ と書けるがこれを使って $I : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$If = If_+ - If_-$$

と拡張すればよいし、線形に拡張するにはこのやり方しかないのもすぐにわかる。

上のリース-マルコフ-角谷の表現定理を使って測度を構成する際には $C_c^+(X)$ 上に

- (1) $\forall f \in C_c^+(X) \quad If \geq 0$
- (2) $\forall f, g \in C_c^+(X) \quad I(f+g) = If + Ig$
- (3) $\forall a \in [0, +\infty) \quad \forall f \in C_c^+(X) \quad I(af) = aI(f)$

を満たす関数が与えられさえすればよいのである。この方法は例えばハール測度を構成する際にも用いられる。

参考文献

- [1] W.Rudin, Real and Complex Analysis second edition, McGraw-Hill, 1974
- [2] 梅垣壽春・大矢雅則・塚田真, 測度・積分・確率, 共立出版, 1987