

バナッハの不動点定理

電波通信

2022 年 3 月 7 日

この文章ではバナッハの不動点定理を証明する。普通のバナッハの不動点定理のあとに、パラメータ付きのバナッハの不動点定理も証明する。

定義 1. 距離空間 X のコーシー列がすべて収束するとき距離空間 X は完備であると言う。

命題 2 (M test もどき). 距離空間 X 内の点列 $\{a_n\}$ が

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(a_n, a_{n+1}) < \infty$$

を満たすなら $\{a_n\}$ はコーシー列であり、特に X が完備ならこの点列は収束する。

証明. $n \leq m$ として三角不等式を繰り返し用いて

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a_{n+1}) + d(a_{n+1}, a_{n+2}) + \cdots + d(a_{m-1}, a_m) = \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1})$$

ここで

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(a_n, a_{n+1}) < \infty$$

なので任意に $\varepsilon > 0$ を与えると適当な $N \in \mathbb{N}$ があって

$$N \leq n, m \implies \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) < \varepsilon$$

となるので点列 $\{a_n\}$ はコーシー列である。 □

定理 3 (Banach の不動点定理). (X, d) を完備距離空間とし、写像 $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ が

$$\exists q \in [0, 1) \forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$$

を満たすとする。(これを満たす写像を縮小写像と言う) このとき、 f には不動点が唯一存在する。

証明. まずこの写像 f が連続であることが直ちに分かる。

X の点 x_0 を適当に選んで数列 $\{x_n\}$ を帰納的に

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

と定義する。この時 $X_{n+1} = f(x_n), x_n = f(x_{n-1})$ より

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq qd(x_{n-1}, x_n)$$

が成り立つことから帰納的に

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n d(x_0, x_1)$$

がわかる。 $0 \leq q < 1$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_0, x_1) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) = d(x_0, x_1) \frac{1}{1-q} < \infty$$

なので補題により $\{x_n\}$ はコーシー列で X は完備であるからこの数列は収束する。その収束値を x とすると f の連続性と

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

及び

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

から

$$f(x) = x$$

がわかる。これで不動点の存在は示された。一意性は x, y を f の不動点とするともちろん $f(x) = x, f(y) = y$ であるから

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$$

で $0 \leq q < 1$ より $d(x, y) \leq 0$ となり、 $x = y$ がわかるので f の不動点は唯一である。 $\square$

定理 4 (パラメータ付きの不動点定理). X を完備距離空間、 T を位相空間とし写像 $f : X \times T \rightarrow X$ が連続であるとし、 $f(x, t) = f_t(x)$ と書くことにする。さらに

$$\exists q \in [0, 1) \forall x, y \in X \forall t \in T \ d(f_t(x), f_t(y)) \leq qd(x, y)$$

を充たし (q が t に依存していないことに注意せよ。)

$$\forall x \in X \ f_t(x) \text{ が } t \text{ について有界}$$

であるとする。(このとき x を固定して $f_t(x)$ が t について有界で連続になる。) このとき先の命題から存在と唯一性が示される t 毎の f_t の不動点を $h(t)$ と書くことにし、写像 $h(t) : T \rightarrow X$ とみなしたとき、 $h(t)$ は連続写像である。

証明. 先とほぼ同様の証明である。一意性などは省き連続性を証明する。 X の点 x_0 を適当に選んで数列 $\{x_n\}$ を帰納的に

$$x_0(t) \equiv x_0, \ x_{n+1}(t) = f_t(x_n(t))$$

と定義する。また実数 M を $\forall t \in T \ d(x_0, x_1(t)) \leq M$ となる M とする。このような M は $x_1(t)$ の有界性から存在する。さてこの時 $x_{n+1}(t) = f_t(x_n(t)), x_n = f_t(x_{n-1}(t))$ より

$$d(x_n(t), x_{n+1}(t)) = d(f_t(x_{n-1}(t)), f_t(x_n(t))) \leq qd(x_{n-1}(t), x_n(t)) \leq d(x_0(t), x_1(t))q^n$$

が成り立つことから帰納的に

$$d(x_n(t), x_{n+1}(t)) \leq q^n d(x_0(t), x_1(t)) \leq Mq^n$$

がわかる。 $0 \leq q < 1$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n(t), x_{n+1}(t)) \leq d(x_0(t), x_1(t)) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) = M \frac{1}{1-q} < \infty$$

なので補題より各 $t \in T$ について

$$d(x_n(t), x_m(t)) \leq \varepsilon$$

よって

$$\sup_{t \in T} d(x_n(t), x_m(t)) \leq \varepsilon$$

つまり $\{x_n(t)\}$ を $x_n(t) : T \rightarrow X$ と見なしたときこの関数列は一様距離でコーシー列で X は完備であるからこの点列列は収束し。各 n について $x_n(t)$ が連続であることから。その一様極限たる $h(t)$ も連続である。これが不動点であることとかは先と同様である。 $\square$

参考文献

- [1] ユルゲン・ヨスト著, 小谷元子訳, ポストモダン解析学, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2000