

有限次元ノルム空間

ナンプキトラ

2022年3月8日

定義 1 (ノルム). 線形空間 X から $\mathbb{R}$ への写像 $n: X \rightarrow \mathbb{R}$ がノルムであるとは任意の $x, y \in X, a \in \mathbb{R}$ に対して

- (1) $n(x) \geq 0$
- (2) $n(x) = 0 \iff x = 0$
- (3) $n(ax) = |a|n(x)$
- (4) $n(x+y) \leq n(x) + n(y)$

を満たすこと。

例 2 (p -ノルム). 実数 $p \in [1, +\infty)$ について N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ 上の p -ノルム $\|\bullet\|_p$ を

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定義すると、これは $\mathbb{R}^N$ 上のノルムになっている。ただし x_i は x の標準的な基底での第 i 成分である。ノルムであることの証明は略する。手頃な本を開けば載っていると思う。

注意. 2-ノルムは通常のユークリッドノルムであり、位相空間としての $(\mathbb{R}^N, \|\bullet\|_2)$ は通常のユークリッド位相空間である。

例 3 (∞ -ノルム). N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ 上の ∞ -ノルムを

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

と定義するとこれは $\mathbb{R}^N$ 上のノルムとなっている。ここで i は $1, 2, \dots, N$ の範囲を動き、 x_i は x の標準的な基底での第 i 成分である。

定義 4. 線型空間 X 上の 2 つのノルム n_1, n_2 が同値であるとはある正の実数 $A, B > 0$ が存在して

$$\forall x \in X \quad An_1(x) \leq n_2(x) \leq Bn_1(x)$$

となることである。

注意. n_1, n_2 が同値であるという関係を $n_1 \sim n_2$ で書くと $\sim$ は同値関係になっている。確かめるのは容易なことである。

また、 X 上の 2 つのノルム n_1, n_2 が同値であるとき、その 2 つのノルムが定める位相は同じ位相となる。

例 5. 任意の $p \in [1, +\infty)$ に対して p -ノルムと ∞ -ノルムは同値となる。実際

$$|x_i| \leq \|x\|_\infty$$

より

$$\|x\|_p \leq \left(\sum_{i=1}^N \|x\|_\infty^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sqrt[p]{N} \|x\|_\infty$$

であり、また明らかに

$$|x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$$

なので

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{N} \|x\|_\infty$$

となり、同値であることがわかる。

ノルムの同値性は同値関係になるので p -ノルム同士は同値であり、更に同じ同値類に ∞ -ノルムが入っている。特に 2-ノルムと ∞ -ノルムは同値なので ∞ -ノルムと 2-ノルムが定める $\mathbb{R}^N$ の位相は同じ位相である。つまり位相空間としての $(\mathbb{R}^N, \|\bullet\|_\infty)$ は通常のユークリッド位相空間である。

上では p -ノルムと ∞ -ノルムが同値であることを示したが、実は $\mathbb{R}^N$ 上の任意のノルムが ∞ -ノルムに同値であることを示そう。ノルムが同値であるという関係は同値関係だったので、 $\mathbb{R}^N$ 上のノルムは全て同値であるということが、これからわかる。

定理 6. $\mathbb{R}^N$ 上の任意のノルム n は ∞ -ノルムと同値。

証明. $\mathbb{R}^N$ の標準的な基底を e_i と書くことにする。そして

$$C = \max_{i=1, \dots, N} n(e_i)$$

と定義すると $C > 0$ である。ここで n がノルムであることから任意の $x \in \mathbb{R}^N$ について

$$n(x) \leq n\left(\sum_{i=1}^N x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^N n(x_i e_i) = \sum_{i=1}^N |x_i| \cdot n(e_i) \leq C \sum_{i=1}^N |x_i| \leq NC \|x\|_\infty$$

となる。ここで $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$ であることを使った。さてノルムの三角不等式から $|n(x) - n(y)| \leq n(x - y)$ がわかり、

$$|n(x) - n(y)| \leq n(x - y) \leq NC \|x - y\|_\infty$$

を得る。このことからノルム n はノルム空間 $(\mathbb{R}^N, \|\bullet\|_\infty)$ 上で連続であることがわかる。さて $\mathbb{R}^N$ の部分集合 K を

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\|_\infty = 1\}$$

と置くと 2-ノルムと ∞ -ノルムが同値であることから集合 K は $\mathbb{R}^N$ の通常の距離における有界閉集合であることがわかる。よって K はコンパクトである。ノルム n はもちろん K 上でも連続なので K のコンパクト性から n は K 上で最小値と最大値を取る。これらをそれぞれ m, M とおくことにしよう。 $0 \notin K$ なので M, m は両方とも正の実数となる。任意の $x \in \mathbb{R}^N$ について

$$\frac{x}{\|x\|_\infty} \in K$$

なので, M, m の定義から

$$m \leq n\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \leq M$$

が成り立つ. ゆえに

$$m\|x\|_\infty \leq n(x) \leq M\|x\|_\infty$$

となるので n と $\|\bullet\|_\infty$ は同値である。

□

系 7. 有限次元線形空間上のノルムは全て同値である。

実はより強く局所コンパクトハウスドルフな位相線形空間は有限次元になるという定理があるのですが、それはまた別のお話。