

コンパクトハウスドルフ空間の正規性ほか

一色三良 (conscious77)

2026 年 7 月 28 日

この文章ではコンパクトハウスドルフ空間の正規性と局所コンパクトハウスドルフ空間の完全正則性を証明する。その後コンパクトハウスドルフ空間に対する有限開被覆に従属する 1 の分割の存在を証明する。実は有限開被覆に従属する 1 の分割の存在は空間の正規性と同値なのであるが、それはまた別の話。以下では全ての空間にハウスドルフ性が仮定されているので正規という言葉と T_4 という言葉、及び正則という言葉と T_3 という言葉を特に区別しないことにする。

命題 1. コンパクトハウスドルフ空間は正則である。

証明. X をコンパクトハウスドルフ空間とし、 $x \notin F$ となる点 $x \in X$ と閉集合 F の任意の組を考える。 X はハウスドルフ空間なので任意の $a \in F$ に対して 2 つの開集合 O_a, P_a が存在して

$$x \in O_a, a \in P_a, O_a \cap P_a = \emptyset$$

とを充たす。さて明らかに

$$F \subset \bigcup_{a \in F} P_a$$

であり。 X のコンパクト性からその閉集合 F もコンパクトになるので有限個の $a_1, a_2, \dots, a_n$ が存在して

$$F \subset \bigcup_{k=1}^n P_{a_k}$$

となるこの右辺を P とおこう。つまり

$$P = \bigcup_{k=1}^n P_{a_k}$$

これに対応して

$$O = \bigcap_{k=1}^n O_{a_k}$$

とすると O は開集合で $x \in O$ であり、各 a_i について

$$O_{a_i} \cap P_{a_i} = \emptyset$$

となり $O \subset O_{a_i}$ なので任意の a_i について

$$O \cap P_{a_i} = \emptyset$$

更に $P = \bigcup_{k=1}^n P_{a_k}$ だから

$$O \cap P = \emptyset$$

そして $x \in O$ で $F \subset P$ なので X が正則であることが分かった。

□

定理 2. コンパクトハウスドルフ空間は正規である。

証明. X の互いに交わらない 2 つの閉集合を任意に固定して A, B とする。先の命題よりコンパクトハウスドルフ空間 X は正則なので任意の $a \in A$ 毎に開集合 U_a, V_a が存在して

$$a \in U_a, B \subset V_a, U_a \cap V_a = \emptyset$$

となる。さて明らかに

$$A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$$

でありコンパクトハウスドルフ空間 X の閉集合 A もコンパクトなので有限個の $a_1, a_2, \dots, a_n$ が存在して

$$A \subset \bigcup_{k=1}^n U_{a_k}$$

となる。

$$U = \bigcup_{k=1}^n U_{a_k}$$

と定義しよう。これに対応して

$$V = \bigcap_{k=1}^n V_{a_k}$$

とすると V は開集合であり、 $B \subset V$ であり各 a_i で

$$U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$$

で $V \subset V_{a_i}$ なので 任意の a_i について

$$U_{a_i} \cap V = \emptyset$$

これと $U = \bigcup_{k=1}^n U_{a_k}$ から

$$U \cap V = \emptyset$$

を得る。そして $A \subset U$ と $B \subset V$ なので X が正規であることが示せた。 □

定理 3. 局所コンパクトハウスドルフ空間は完全正則である。

証明. 局所コンパクトハウスドルフ空間 X の互いに交わらない点と閉集合を x, F とし、 X の 1 点コンパクト化を Y とし、無限遠点を ∞ とする。つまり $Y = X \cup \{\infty\}$ この時 $G = F \cup \{\infty\}$ は Y の閉集合であり $x \notin G$ である。 Y は正規なのでウリゾーンの補題から $f(x) = 0, f|_G = 0$ となる連続写像 $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。これを X に制限すればそれも連続であり、 x と F を分離する関数であるから X が完全正則であることがわかる。 □

定義 4 (関数の台)．写像 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ の台を集合 $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ の閉包として定義し、これを $\text{supp} f$ で表す。

注意. 閉包を取ってすることに注意せよ。

定理 5 (被覆の縮小の存在). コンパクトハウスドルフ空間 X の有限開被覆 $\{U_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ について有限開被覆 $\{V_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が存在して

$$\text{CL}(V_k) \subset U_k$$

を充たす。

証明. 帰納的に V_k を構成する。

まず V_1 を構成する。 $F_1 = X \setminus \bigcup_{k \neq 1} U_k$ と置くとこれは閉集合で $\{U_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が被覆を成すことから

$$F_1 \subset U_1$$

となる。ここで X の正規性を用いると

$$F_1 \subset V \subset \text{CL}(V) \subset U_1$$

となる開集合 V が存在する。このような V の一つを V_1 とおくと

$$\text{CL}(V_1) \subset U_1$$

を明らかに充たし更に $\{V_1, U_2, U_3, \dots, U_n\}$ が X の被覆を成している。

V_k まで

$$\text{CL}(V_k) \subset U_k$$

を充たし $\{V_1, V_2, \dots, V_k, U_{k+1}, U_{k+2}, \dots, U_n\}$ が被覆を成すような V_k が構成されたとしよう。この時

$$F_{k+1} = X \setminus \left(\bigcup_{l=1}^k V_l \cup \bigcup_{l=k+2}^n U_l \right)$$

とする (U_{k+1} は和集合されてる中ではないことに注意せよ) このとき F_{k+1} は閉集合で $\{V_1, V_2, \dots, V_k, U_{k+1}, U_{k+2}, \dots, U_n\}$ が被覆を成してるということから

$$F_{k+1} \subset U_{k+1}$$

となる。 X の正規性を用いると

$$F_{k+1} \subset V \subset \text{CL}(V) \subset U_{k+1}$$

となる。開集合 V が存在するがこれの一つを V_{k+1} とすると

$$\text{CL}(V_{k+1}) \subset U_{k+1}$$

を充たし $\{V_1, V_2, \dots, V_k, V_{k+1}, U_{k+2}, \dots, U_n\}$ は被覆を成す。この構成を n まで行えば求める $\{V_k\}$ が得られる。 $\square$

注意. 証明の中で X の正規性以外の性質を用いてないことに注意せよ。つまり、この定理は一般に正規空間でも成り立つのだが、それはまた別のお話。

定理 6 (被覆の縮小の存在 2). コンパクトハウスドルフ空間 X の有限開被覆 $\{U_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ について有限開被覆 $\{L_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が存在して

$$L_k \subset U_k$$

を充たす。

証明. $\{U_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ に対して定理 5 を用いて

$$\text{CL}(V_k) \subset U_k$$

を充たす有限開被覆 $\{V_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が存在する。これを用いて

$$L_k = \text{CL}(V_k)$$

とすれば良い。 □

注意. 定理 6 は有限閉 (*closed*) 被覆の存在を言ってることに注意せよ。開 (*open*) 被覆ではない。

定理 7 (コンパクトハウスドルフ空間上の単位の分割). コンパクトハウスドルフ空間 X の有限開被覆 $\{U_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ について実連続関数の族 $\{f_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が存在して以下を充たす。

$$\begin{aligned} \text{supp } f_k &\subset U_k \\ 0 &\leq f_k \leq 1 \\ \sum_{k=1}^n f_k &\equiv 1 \end{aligned}$$

証明. 定理 6 から $\{U_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ に対して

$$L_k \subset U_k$$

を充たす有限閉被覆 $\{L_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が存在する。ここでウリゾーンの補題より各 k 毎に連続関数 $g_k : X \rightarrow [0, 1]$ が存在して

$$g_k|_{L_k} = 1, \quad g_k|_{X \setminus U_k} = 0$$

を充たす。つまり

$$\text{supp}(g) \subset U_k$$

である。 $\{L_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が被覆であることから $\sum_{k=1}^n g_k$ は常に正である。そこで

$$f_k = \frac{g_k}{\sum_{k=1}^n g_k}$$

と置けばこれは連続で明らかに

$$\begin{aligned} \text{supp } f_k &\subset U_k \\ 0 &\leq f_k \leq 1 \\ \sum_{k=1}^n f_k &\equiv 1 \end{aligned}$$

を充たす。 □

系 8 (局所コンパクトハウスドルフ空間のコンパクト集合上の単位の分割). 局所コンパクトハウスドルフ空間 X のコンパクト集合 K と有限個の開集合の族 $\{U_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$$

を充たしてとする。このとき実連続関数の族 $\{f_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が存在して以下を充たす。

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} f_k &\subset U_k \\ 0 &\leq f_k \leq 1 \\ \forall x \in K \quad \sum_{k=1}^n f_k(x) &\equiv 1 \end{aligned}$$

証明. X の 1 点コンパクト化を Y と置くこの時 $\{U_1, U_2, \dots, U_n, Y \setminus K\}$ は Y の被覆となっている。都合のために $U_{n+1} = Y \setminus K$ と置こう。 $\{U_k\}_{k=1,2,\dots,n,n+1}$ は Y の被覆を成してるので先の定理 8 より

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} f_k &\subset U_k \\ 0 &\leq f_k \leq 1 \\ \forall x \in K \quad \sum_{k=1}^{n+1} f_k(x) &\equiv 1 \end{aligned}$$

を充たす実連続関数の族 $\{f_k\}_{k=1,2,\dots,n,n+1}$ が存在する。ここで

$$\operatorname{supp} f_{n+1} \subset U_{n+1} = Y \setminus K$$

より

$$f_{n+1}|_K \equiv 0$$

よって $\{f_k\}_{k=1,2,\dots,n,n+1}$ から f_{n+1} を除いた $\{f_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ は明らかに

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} f_k &\subset U_k \\ 0 &\leq f_k \leq 1 \\ \forall x \in K \quad \sum_{k=1}^n f_k(x) &\equiv 1 \end{aligned}$$

を充たす。 □

定義 9. 位相空間 X の部分集合 A が相対コンパクトであるとはその閉包 $\operatorname{CL}(A)$ がコンパクトである時に言う

補題 10. 局所コンパクトハウスドルフ空間 X とそのコンパクト集合 K と開集合 G について $K \subset G$ が充たされるならば、相対コンパクトな開集合 V が存在して

$$K \subset V \subset \operatorname{CL}(V) \subset G$$

を充たす。つまり局所コンパクトハウスドルフ空間のコンパクト集合は相対コンパクトな基本近傍系を持つということである。

証明. X は局所コンパクトハウスドルフなので K も各点 $a \in K$ について相対コンパクトな開集合 V_a が存在して

$$V_a \subset \operatorname{CL}(V_a) \subset G$$

を充たす。また明らかに

$$K \subset \bigcup_{a \in K} V_a$$

なので K のコンパクト性から有限個の $a_1, a_2, \dots, a_k$ が存在して

$$K \subset \bigcup_{i=1}^k V_{a_i}$$

となる。

$$\text{CL}\left(\bigcup_{i=1}^k V_{a_i}\right) = \bigcup_{i=1}^k \text{CL}(V_{a_i})$$

なので $V = \bigcup_{i=1}^k V_{a_i}$ も相対コンパクトで

$$V \subset \text{CL}(V) \subset G$$

なので定理の証明は終わる。 □

定理 11 (局所コンパクトハウスドルフ空間のコンパクト集合上のコンパクトサポートな単位の分割). 局所コンパクトハウスドルフ空間 X のコンパクト集合 K と有限個の開集合の族 $\{U_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$$

を満たしてとする。このとき実連続関数の族 $\{f_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が存在して以下を満たす。

各 $\text{supp } f_k$ はコンパクト

$$\text{supp } f_k \subset U_k$$

$$0 \leq f_k \leq 1$$

$$\forall x \in K \quad \sum_{k=1}^n f_k(x) \equiv 1$$

証明. K と $\bigcup_{k=1}^n U_k$ に対して先の補題を用いれば相対コンパクトな開集合 V が存在して

$$K \subset V \subset \text{CL}(V) \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$$

を満たす。

さて $O_k = U_k \cap V$ と置くと、各 O_k は相対コンパクトであり、

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n O_k$$

を満たす。 K と $\{O_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ に対して系 8 を用いると、実連続関数の族 $\{f_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ が存在して以下を満たす。

$$\text{supp } f_k \subset O_k$$

$$0 \leq f_k \leq 1$$

$$\forall x \in K \quad \sum_{k=1}^n f_k(x) \equiv 1$$

ところで O_k が相対コンパクトであることから各 $\text{supp } f_k$ はコンパクトであり、 $O_k \subset U_k$ なので定理は示された。 □

参考文献

- [1] 森田紀一, 位相空間論, 岩波全書 331, 岩波書店, 1981
- [2] W.Rudin, Real and Complex Analysis second edition, McGraw-Hill, 1974