

射影と閉写像によるコンパクト性の特徴付け

一色三良 (conscious77)

2015 年 10 月 12 日

証明の本質は冬 (fuyu_atsusugi_) 氏に負うものである。

定理 1. 位相空間 X に対して以下は同値。

- (1) X はコンパクト
- (2) 任意の位相空間 Y について射影 $\pi: X \times Y \rightarrow Y$ は閉写像。

証明. まず (1) $\implies$ (2) はよく知られた事実で Tube lemma から従う。以下 (2) $\implies$ (1) を示す。

(2) $\implies$ (1) の対偶を示す。つまりノンコンパクトな空間 X に対して $\pi: X \times Y \rightarrow Y$ が閉写像とならないような Y を構成する。

今、 X がノンコンパクトなので有限部分被覆を持たない開被覆 $\mathcal{C}$ が存在する。さてこの $\mathcal{U}$ について基数 κ を

$$\kappa = \min\{\text{card}(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{C} \text{ かつ } \mathcal{U} \text{ は } X \text{ の被覆}\}$$

と定義する。ここで $\text{card}(A)$ で集合 A の基数を表す。 $\mathcal{C}$ の取り方から κ は無限基数である。 κ は

$$\{\text{card}(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{C} \text{ かつ } \mathcal{U} \text{ は } X \text{ の被覆}\}$$

の最小値であるので

$$\kappa = \text{card}(\mathcal{U})$$

となるものが存在する。これを κ で添字付けて

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$$

と置く。さて、

$$Y = [0, \kappa] = \kappa + 1$$

と置き、 Y の開集合系 $\{V_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ を

$$V_\alpha = (\alpha, \rightarrow) = (\alpha, \kappa]$$

と定義する。そして $X \times Y$ の部分集合 O を

$$O = \bigcup_{\alpha < \kappa} U_\alpha \times V_\alpha$$

と定義する。定義から

$$\forall \alpha < \kappa \quad \kappa \in V_\alpha$$

で $\{U_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ は被覆を成してるので

$$\forall x \in X \quad (x, \kappa) \in O$$

が成り立つ。そして O は明らかに $X \times Y$ の開集合であるので

$$F = (X \times Y) \setminus O$$

は $X \times Y$ の閉集合となり。

$$\forall x \in X \ (x, \kappa) \notin F$$

が成り立つ。 $\forall x \in X \ (x, \kappa) \notin F$ なので射影 $\pi: X \times Y \rightarrow Y$ による像は

$$\kappa \notin \pi(F)$$

を充たす。この $\pi(F)$ について次の主張が成り立つ。

主張.

$$\pi(F) = Y \setminus \{\kappa\}$$

証明. $\beta \in \kappa$ を任意に与える。

$$\text{card}(\{U_\alpha\}_{\alpha < \beta+1}) = \text{card}([0, \beta]) < \kappa$$

なので κ の定義より $\{U_\alpha\}_{\alpha < \beta+1}$ は X の被覆でない。そこで $x \in X \setminus \bigcup_{\alpha < \beta+1} U_\alpha$ を取る。このとき

$$(x, \beta) \notin \bigcup_{\alpha < \beta+1} U_\alpha \times V_\alpha$$

で $\beta+1 \leq \alpha$ なら $\beta \notin V_\alpha = (\alpha, \kappa]$ なので

$$(x, \beta) \notin \bigcup_{\beta+1 \leq \alpha < \kappa} U_\alpha \times V_\alpha$$

となる。よって

$$(x, \beta) \notin O$$

が成り立ちつまり

$$(x, \beta) \in F$$

だから

$$\beta \in \pi(F)$$

となる。 $\beta < \kappa$ は任意で $\kappa \notin \pi(F)$ だったので

$$\pi(F) = Y \setminus \{\kappa\}$$

[主張の証明終]

□

[定理の証明の続き] κ は無限基数なので極限数である。つまり $Y = [0, \kappa]$ の中で κ は集積点となっており、特に $\{\kappa\}$ は開集合ではない。よって $\pi(F) = Y \setminus \{\kappa\}$ は閉集合ではない。つまり射影 $\pi: X \times Y \rightarrow Y$ は閉写像でない。 □