

距離空間のこと

一色三良 (conscious77)

2015 年 10 月 9 日

この文書では距離空間のちょっとした性質を紹介する。まず section1 では距離関数のこと、section2 では距離空間に値を持つ関数列の一致収束などのこと、最後の section3 では距離空間の完備化のことを載せた。距離関数やそこから定まる位相については既知のものとする。

1 距離関数のこと

命題 1 (三角不等式第二形態). 距離関数 d について

$$|d(z, x) - d(z, y)| \leq d(x, y)$$

証明. 三角不等式から

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(x, y)$$

で $d(z, y)$ を移項して

$$d(z, x) - d(z, y) \leq d(x, y)$$

なので x, y を入れ替えることにより

$$d(z, y) - d(z, x) \leq d(x, y)$$

を得るので

$$|d(z, x) - d(z, y)| \leq d(x, y)$$

を得る。□

命題 2. 距離空間 (X, d) に距離位相を入れるとき、

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

は連続で更には一様連続である。(もちろん $X \times X$ には直積位相が入っている。)

証明. 2つの ε 球の直積が $X \times X$ の開基となるので、示すべきことは

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ d(a, x) < \delta \ d(b, y) < \delta \implies |d(x, y) - d(a, b)| < \varepsilon$$

である。 $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ とすれば三角不等式第二形態から

$$\begin{aligned} |d(x, y) - d(a, b)| &\leq |d(x, y) - d(a, y) + d(a, y) - d(a, b)| \leq |d(x, y) - d(a, y)| + |d(a, y) - d(a, b)| \\ &\leq d(x, a) + d(b, y) < \delta + \delta = 2\delta < \varepsilon \end{aligned}$$

となりわかる。□

定義 3 (集合同士の距離). 距離空間 (X, d) の部分集合 A, B の距離を

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$$

と定義する。 $d(A, B) = d(B, A)$ に注意せよ。

また、 $B = \{x\}$ の時 $d(A, \{x\})$ を簡単に $d(A, x) = d(x, A)$ と書く

命題 4.

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

が成立する。

証明. $x, y, \in X$ と $a \in A$ を任意に固定する時

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

で、

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$$

となり、左辺はもはや $a \in A$ に関係無い定数なので

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$$

つまり

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

である。残りは x と y の役割を交換すればわかる。 □

以上から $A \subset X$ がどんな集合でも $d(x, A)$ は連続であることがわかる。

命題 5 (距離と閉包).

$$x \in \bar{A} \iff d(x, A) = 0$$

証明. $d(x, A)$ は x についての連続関数であるので、 $S = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ は閉集合であり、 $a \in A$ ならば $d(a, A) = 0$ なので $A \subset S$ であり、よって

$$\bar{A} \subset S$$

逆に $s \in S$ について $d(s, A) = 0$ なので任意の $\varepsilon > 0$ について

$$\exists a \in A \ d(s, a) < \varepsilon$$

つまり

$$\forall \varepsilon > 0 \ B(s, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

であり

$$S \subset \bar{A}$$

が従う。 □

定理 6. 距離空間は正規

証明. X を距離空間とし、 A, B を互いに交わらない閉集合とすると、 $d(x, A) + d(x, B) > 0$ なので

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

が定義できて、更にこれは連続である。また上の命題より

$$a \in A \implies f(x) = 0$$

でかつ

$$b \in B \implies f(b) = \frac{d(b, A)}{d(b, A) + d(b, B)} = \frac{d(b, A)}{d(b, A)} = 1$$

となるので f は A と B を分離する関数であるので、 X が正規であることがわかる。 $\square$

2 一様収束のこと

定義 7. 距離空間 X のコーシー列がすべて収束するとき距離空間 X は完備であると言う。

定義 8 (有界). 距離空間 X の部分空間 A が有界であるとは、

$$\exists a \in X \exists r > 0 \ A \subset B(a, r)$$

が成り立つこと。

定義 9 (関数の有界性). 位相空間 X から距離空間 Y への写像 f が有界であるとは、 f の像 $f(X)$ が Y で集合として有界であることと定める。

定義 10 (一様収束, 一様収束距離). 位相空間 X から距離空間 Y への連続写像の族 $f_n : X \rightarrow Y$ が $f; X \rightarrow Y$ に一様収束するとは

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

を充たすことである。

以下 $\sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$ を $D(f, g)$ と書くことにする。もちろん X, Y が異なれば D は別のものになるが、紛れがない限りにおいて D と書くことにする。これに従うと上の条件は

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \ D(f_n, f) < \varepsilon$$

と書ける。

注意. f, g に条件を付けないと $D(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$ は有限の値として確定しないことに注意せよ。

命題 11 (連続関数の一様連続極限). 位相空間 X から距離空間 Y への連続写像の族 $f_n : X \rightarrow Y$ が $f; X \rightarrow Y$ に一様収束するならば f も連続である。

証明. $a \in X$ と $\varepsilon > 0$ を任意に与え $\{f_n\}$ が f に一様収束することから存在が保証される $N \in \mathbb{N}$ を

$$D(f_N, f) < \frac{\varepsilon}{3}$$

となるものとする。 f_N の連続性から存在が保証される a の近傍 V を

$$x \in V \implies d(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

となるものとする $x \in V$ ならば

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)) \\ &\leq 2D(f_N, f) + d(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

となり a での連続性がわかる。 a は任意だったので f は連続。

□

注意. X が距離空間である必要がないことに注意せよ。

定義 12 (有界関数の空間). $C_b(X, Y)$ を

$$C_b(X, Y) = \{f \mid \text{有界連続写像 } f : X \rightarrow Y\}$$

と定める。この集合上で D は ∞ の値を取らず、ちゃんと $\mathbb{R}$ に値を持ち、距離となる。以下この D を以って $C_b(X, Y)$ に位相を入れて考える。

注意. X が距離空間であるとは全く仮定していないことに注意せよ。

命題 13 (有界関数空間の完備性). Y が完備ならば、 $C_b(X, Y)$ も完備となる。

証明. $C_b(X, Y)$ 内の点列 $\{f_n\}$ がコーシー列であるとする、 $x \in X$ を任意に固定する毎に $\{f_n(x)\}$ は Y 内のコーシー列となっているので各 x 毎に $\{f_n(x)\}$ の極限が存在する。それを $f(x)$ と書く。この f は X から Y への写像になっている。さてこの f が連続であることを示そう。 $N \in \mathbb{N}$ を十分大きく取れば $n \geq m \geq N$ ならば

$$D(f_n, f_m) < \varepsilon$$

とできるが、同時に任意の $x \in X$ に対して

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq D(f_n, f_m) < \varepsilon$$

となる。ここで $n \rightarrow \infty$ とすれば距離関数 d の連続性から

$$d(f(x), f_m(x)) \leq D(f_n, f_m) < \varepsilon$$

となる。 $x \in X$ は任意だったので

$$D(f, f_m) < \varepsilon$$

となり前述の命題から f は連続で f_m の有界性から f も有界だとわかるので $f \in C_b(X, Y)$ 以上からコーシー列 $\{f_n\}$ は f に収束することが分かったので $C_b(X, Y)$ は完備である。 □

注意. 3 回目になるが、 X は距離空間である必要はない。またこの命題から $C_b(X, \mathbb{R})$ が完備であることがわかる。

命題 14 (M test). X から Y への連続関数列 $\{f_n\}$ について $\sup_x |f_n(x)| \leq M_n$ で $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ となる数列 M_n が存在するとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は一様収束する。

証明. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ の収束性から $\{f_n\}$ がコーシー列になるから明らか。 □

注意. もうお分かりであると思うが、 X は一般の位相空間である。

3 完備化のこと

定義 15 (完備化). 距離空間 Y が距離空間 X の完備化であるとは Y が完備で等距離写像 $i: X \rightarrow Y$ が存在すること。

注意. 距離空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が等距離写像であるとは $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$ となること。等距離写像は単射で更に連続となり X と $f(X)$ は同相となることに注意せよ。

命題 16 (完備性と閉集合). X を完備距離空間とすると、以下が成り立つ。

1. X の閉集合も完備
2. X の部分空間 A の X における閉包 $\bar{A}$ は A の完備化となる。

証明. 1 を示せば 2 は明らかであるので 1 を示す。

A のコーシー列 $\{x_n\}$ を与えると、これは X においてもコーシー列であり、 X 内に収束点 x を持つ、ここで A が閉であることから A 内の点列の収束値は A に属する。つまり $x \in A$ なので A 内のコーシー列 $\{x_n\}$ は A に収束点を持つので A は完備。 □

注意. もちろん上の命題の部分空間とはその集合へ距離関数を制限したものである。

上の命題の 1 のある意味での逆が成り立つ。距離空間 X の部分空間が完備ならその部分空間は閉

上の命題から距離空間の完備化を得るにはその空間から何か完備な他の空間への等距離写像があれば良いことがわかる。そのことに関して次の命題がある。

定理 17 (距離空間を用いた完備化). 距離空間 X から $C_b(X, \mathbb{R})$ への等距離写像が存在する。

証明. $\omega \in X$ を適当に選び、 $a \in X$ を以下のように定義される関数 $F_a: X \rightarrow \mathbb{R}$ に対応させる。

$$F_a(x) = d(a, x) - d(\omega, x)$$

この写像 F_a は x について明らかに連続で三角不等式から

$$|F_a(x)| \leq d(a, \omega)$$

となるので有界。よって $F_a \in C_b(X, \mathbb{R})$ この $a \in X$ に対し $F_a \in C_b(X, \mathbb{R})$ を対応させる写像を Φ と書こう。ここで任意の $a, b, x \in X$ に対して三角不等式から

$$|F_a(x) - F_b(x)| = |d(a, x) - d(\omega, x) - (d(b, x) - d(\omega, x))| = |d(a, x) - d(b, x)| \leq d(a, b)$$

そして

$$|F_a(a) - F_b(a)| = |d(a, a) - d(\omega, a) - (d(b, a) - d(\omega, a))| = |d(b, a) - d(a, b)|$$

よって

$$D(\Phi(a), \Phi(b)) = D(F_a, F_b) = \sup_{x \in X} |F_a(x) - F_b(x)| = d(a, b)$$

つまり Φ は等長写像となる。

□

上の命題から任意の距離空間に完備化が存在することがわかる。この方法はフレシェとクラトフスキーによるものらしい。この完備化の方法は距離空間のコーシー列全体に同値関係と距離を定める方法よりも簡明であると思う。

参考文献

[1] 森田紀一, 位相空間論, 岩波全書 331, 岩波書店, 1981