

可分距離空間の閉集合全体の濃度

一色三良 (conscious77)

2026 年 7 月 28 日

命題 1 (距離と閉包).

$$x \in \bar{A} \iff d(x, A) = 0$$

証明. $d(x, A)$ は x についての連続関数であるので、 $S = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ は閉集合であり、 $a \in A$ ならば $d(a, A) = 0$ なので $A \subset S$ であり、

$$\bar{A} \subset S$$

逆に $s \in S$ について $d(s, A) = 0$ なので任意の $\varepsilon > 0$ について

$$\exists a \in A \ d(s, a) < \varepsilon$$

つまり

$$\forall \varepsilon > 0 \ B(s, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

であり

$$S \subset \bar{A}$$

が従う。

□

事実 2. 距離空間に於いて次は同値。

- | | |
|--------|-----|
| 可分性 | (1) |
| 第二可算公理 | (2) |
| リンデレフ性 | (3) |

注意. 実は距離空間において $C.C.C.$ (可算鎖条件) もこれらと同値になる。

以降可分距離空間と言った時には上の同値な条件を断りなく自由に用いる。

定理 3 (可分距離空間の閉集合の濃度). 可分距離空間の閉集合全体の濃度は連続体を超えない。

証明. 考える k_y 理空間を (X, d) とし、その閉集合全体を $\mathfrak{F}$ と書くことにする。 X は第二可算なので高々可算な開基が存在するその一つを $\mathfrak{B}$ とする。

閉集合 A のについて A_n を帰納的に以下のように定義する。

A_1 は $\mathfrak{B}$ の元のうち、 A と交わる直径が 1 以下のものの全体の和集合。

A_n まで定義されたとして A_{n+1} を $\mathfrak{B}$ の元のうち、 A_n に含まれ A と共通部分を持つ直径が $\frac{1}{n+1}$ 以下のものの全体の和集合とする。この時命題 1 より

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$$

が成立する。いま

$$\mathfrak{C} = \{S \subset X \mid S \text{ は } \mathfrak{B} \text{ の元の高々可算個の和集合}\}$$

とすると $\mathfrak{C}$ は高々連続体濃度である。さて、 $\mathfrak{B}$ は高々可算な集合なので各 A_n は $\mathfrak{B}$ の元の高々可算な集合の和集合である。よって $A_n \in \mathfrak{C}$ ところで

$$M : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{C}^{\mathbb{N}}$$

を $A \in \mathfrak{F}$ にたいして最初に定義した可算個の集合の組 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対応させる写像として定義する。この時この写像 M は単射である。なぜなら $(A_n) = (B_n)$ ならば、 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ だからである。さて $\mathfrak{C}$ が高々連続体であることから

$$\text{card}(\mathfrak{C}^{\mathbb{N}}) = \text{card}(\mathfrak{C})^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

なので $\mathfrak{F}$ は高々連続体濃度である。

□