

実数直線上の単射実連続関数について

一色三良 (conscious77)

2015 年 9 月 13 日

タイトルの通りである。事実などの証明は参考文献 [1] を参照のこと。

事実 1. 実数直線に於いて

$$(a, b) \ (a, +\infty) \ (-\infty, b) \ (-\infty, +\infty) \ (a, b] \ [a, b) \ (-\infty, b] \ [a, +\infty) \ [a, b]$$

の形の集合は連結であり、逆に連結な集合はこのような形の集合に限る。この形の集合を単に区間と呼ぶ。

事実 2. 連結空間の連続像は連結である。

系 3 (中間値の定理). X を連結空間とし

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

を連続関数すると

$$a < b \text{ かつ } a, b \in f(X) \Rightarrow [a, b] \subset f(X)$$

系 4 (中間値の定理 II). 上の中間値の定理と同じ仮定をするその時

$$0 \notin f(X) \Rightarrow f \text{ は定符号}$$

補題 5. I を区間とするこのとき

$$A = \{(x, y) \in I \times I \mid x < y\}$$

は連結である。

証明. A が弧状連結であることを示す。 $(a, b), (c, d) \in A$ とする。ここで $a \leq c$ と仮定しても一般性を失わない。さて $a \leq c < d$ より $a < d$ より $(a, d) \in A$ であり。さらに明らかに (a, b) と (a, d) は A の中で道 (path) で結べて、 $a \leq c$ より (c, d) は (a, d) と A の中で道で結べる (図を書いてみよ) よって (a, d) を中継して (a, b) と (c, d) は A の中で道で結べる。 $(a, b), (c, d)$ の任意性から A は弧状連結、特に連結である。□

定理 6. 実数直線の区間の上の実数値連続関数は狭義の単調関数である。

証明. 今考えてる区間、関数をそれぞれ I, f とし $A = \{(x, y) \in I \times I \mid x < y\}$ 上の関数を

$$F(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

と定義する。 $((x, y) \in A \Rightarrow y > x$ よりこの関数は定義できる。) 明らかにこの関数は連続でもし $F(x, y) = 0$ ならば $f(x) = f(y)$ となり単射性から $x = y$ となり $(x, y) \in A$ に反する。よって F の値域には 0 は含まれない。よって中間値の定理 II から F は定符号である

$$f(y) - f(x) = F(x, y)(y - x)$$

と $(x, y) \in A \Rightarrow y - x > 0$ から F が常に正なら f は狭義の単調増加、 F が常に負なら f は狭義の単調減少となる。 $\square$

参考文献

[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968