

代数学の基本定理

電波通信

2018 年 8 月 1 日

この文書では代数学の基本定理の初等的な証明を述べる。前提知識は特に必要ない。まずは次の補題を証明する。

補題 1. 複素係数多項式 f に対してその絶対値 $|f|$ は複素平面上で最小値を持つ。

証明. $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ という風に最高次係数が 1 (つまりモノニックということ) と仮定しても良い。最初に $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$ を示そう。この式の意味は

$$\forall K > 0 \exists R > 0 \forall z \in \mathbb{C} \ R < |z| \Rightarrow K < |f(z)|$$

である。 $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ を z^n でくくって

$$f(z) = z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

で明らかに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right) = 1$$

なので $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$ がわかる。さて $K = |f(0)|$ として R を選べば、

$$|z| > R \Rightarrow |f(0)| < |f(z)|$$

となる。 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ はコンパクトなので f はこの上で最小値をとるが、 $0 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ で $|z| > R \Rightarrow |f(0)| < |f(z)|$ なので、その最小値が $\mathbb{C}$ 全体での f の最小値となる。 $\square$

補題 2. 定数でない複素係数多項式 f について、 $f(a) \neq 0$ ならば

$$|f(b)| < |f(a)|$$

となる b が a の十分小さい近傍に存在する。

証明. $f(a) \neq 0$ なので

$$g(z) = \frac{f(z+a)}{f(a)}$$

が定義できる。 $g(0) = \frac{f(0+a)}{f(a)} = \frac{f(a)}{f(a)} = 1$ なので

$$g(z) = 1 + b_1z + \dots + b_{n-1}z^{n-1} + b_nz^n$$

と表せる。 $b_1, \dots, b_{n-1}, b_n$ が 0 とならない最小の番号を k として、(つまり $i < k$ ならば $b_i = 0$ で、 $b_k \neq 0$ ということ) $b_k (\neq 0)$ を極座標表示して $b_k = r \exp(\sqrt{-1}\theta)$ と書き表し、 $M := \max\{|b_{k+1}|, \dots, |b_{n-1}|, |b_n|\}$ とする。さて正の実数 u を十分小さくとり

$$u < 1, \quad 0 < 1 - ru^k, \quad 0 < ru^k - M \frac{u^{k+1}}{1-u} < 1$$

と出来る。なぜなら

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1 - ru^k) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} (ru^k - M \frac{u^{k+1}}{1-u}) = r$$

だからである。さて $c := u \exp(\frac{\pi - \theta}{k})$ と置き、

$$\begin{aligned} |g(c)| &\leq |1 - ru^k| + M(u^{k+1} + \dots + u^{n-1} + u^n) \\ &\leq 1 - ru^k + M \frac{u^{k+1}}{1-u} < 1 \end{aligned}$$

を得る。よって $g(c) = \frac{f(c+a)}{f(a)}$ より $b = c + a$ とすれば

$$|f(b)| < |f(a)|$$

□

ここまで来たら後は簡単である。いよいよ本題に入ろう

定理 3 (代数学の基本定理). 定数でない複素係数多項式 f は $\mathbb{C}$ に零点を持つ。

証明. 補題 1 より最小値 $|f(a)|$ が存在するが f に零点がないとすると $|f(a)| \neq 0$ なので補題 2 から

$$|f(b)| < |f(a)|$$

となる b が存在するがこれは最小性に矛盾するので f は零点を持つ。

□

参考文献

[1] 齋藤正彦『線形代数入門』(基礎数学 1) 東京大学出版会 (1966)