

始位相

電波通信

2018 年 8 月 2 日

この文書では始位相とその性質について紹介する。強く紹介したいのは定理 6 である。この定理は筆者が位相空間論を初めて楽しく感じた定理である。始位相とは Initial topology を訳したものだが逆位相とも呼ばれる。

定義 1 (始位相). X を集合 $\{(Y_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とし、各 λ 毎に写像

$$f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$$

が与えられているとするこの時 X に写像族 $F = \{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をすべて連続にするような最弱の位相が存在する。それを $F = \{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ から誘導された始位相と呼ぶ。此処では記号 $\mathfrak{I}(F)$ で表すことにする。この位相は準開基 $\mathfrak{M} = \{f_\lambda^{-1}(U) \mid U \in \mathfrak{O}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ により生成されている

$\mathfrak{I}$ は I のフラクトゥールである。

例 2 (直積位相). 位相空間の族 $\{(X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ の位相はその射影の族 $\{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ から定まる始位相である。

例 3 (相対位相). 相対位相は包含写像から定まる始位相である。

例 4 (シェルピンスキー空間と位相空間). シェルピンスキー空間とは集合 $2 = \{0, 1\}$ に

$$\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

を開集合族として位相を定義した空間である。 $(X, \mathfrak{O})$ を任意の位相空間とするとこの位相は $\mathfrak{O}$ によって添字付けられた開集合の特性関数の関数の族

$$\chi_U : X \rightarrow \{0, 1\}$$

によって定まる始位相である。より強く $(X, \mathfrak{O})$ の開基の一つを $\mathfrak{B}$ とするとこの空間の位相はシェルピンスキー空間への連続写像の族 $\{\chi_B\}_{B \in \mathfrak{B}}$ から定まる始位相である。証明は容易であろう。この事実は後で使う。

定理 5 (始位相の普遍性). 位相空間 Y には $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ から定まる始位相が入っているとしこの関数族の終域を $\{Z_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ とするこの時位相空間 X からの Y への写像 ϕ について

$$\phi : X \rightarrow Y \text{ が連続} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda \ f_\lambda \circ \phi : X \rightarrow Z_\lambda \text{ が連続}$$

が成立する。

証明. $[\Rightarrow]$ の部分は明らかである. $[\Leftarrow]$ を証明しよう. X の位相は準開基 $\mathfrak{M} = \{f_\lambda^{-1}(U) \mid U \in \mathfrak{D}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ により生成されていることを思い出そう. すると任意の λ と任意の $U \in \mathfrak{D}_\lambda$ に対して

$$\phi^{-1}(f_\lambda^{-1}(U)) = (f_\lambda \circ \phi)^{-1}(U)$$

が開集合であることを示せば良いが、それは

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad f_\lambda \circ \phi : X \rightarrow Z_\lambda \text{ が連続}$$

であることから直ちに分かる. □

定理 6 (始位相の埋め込み定理). 位相空間 $(X, \mathfrak{D})$ には $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ から定まる始位相が入っているとしこの関数族の終域を $\{(Y_\lambda, \mathfrak{D}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ とするとき関数

$$\phi = \prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda : X \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_{\lambda \in \Lambda}$$

について $\mathfrak{I}(F) = \mathfrak{I}(\phi)$ が成立する. また ϕ が単射ならばこれは埋め込みになっているつまり $(X, \mathfrak{D})$ は $\prod_{\lambda \in \Lambda} Y_{\lambda \in \Lambda}$ の部分空間 $\phi(X)$ と同相となる.

証明. [前半] 始位相の普遍性 (直積位相 n 普遍性を用いる) から ϕ は $(X, \mathfrak{I}(F))$ 上 ϕ は連続なので最小性から

$$\mathfrak{I}(\phi) \subset \mathfrak{I}(F)$$

そして $\pi_\lambda \circ \phi = F_\lambda$ なので f_λ は $(X, \mathfrak{I}(\phi))$ 上で連続なので始位相の最小性から

$$\mathfrak{I}(F) \subset \mathfrak{I}(\phi)$$

よって $\mathfrak{I}(F) = \mathfrak{I}(\phi)$ が成り立つ.

[後半] 後半は X の位相が準開基 $\mathfrak{M} = \{f_\lambda^{-1}(U) \mid U \in \mathfrak{D}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ により生成されていることと今は ϕ が単射であるから ϕ の直像は交わりを保つ. よって $\phi(f_\lambda^{-1}(U))$ が $\phi(X)$ の開集合であることを示せばいい. 此処で $f_\lambda = \pi_\lambda \circ \phi$ を用いると

$$f_\lambda^{-1}(U) = \phi^{-1}(\pi^{-1}(U))$$

と書くことができ、 ϕ の単射性を用いて

$$\phi(f_\lambda^{-1}(U)) = \phi(\phi^{-1}(\pi^{-1}(U))) = \pi^{-1}(U) \cap \phi(X)$$

を得て、直積位相と相対位相の定義から $\pi^{-1}(U) \cap \phi(X)$ は $\phi(X)$ の開集合である. これで証明が終わる. □

例 7 (T_0 空間). T_0 空間はシェルピンスキー空間の直積に埋め込み可能である. これは開基 $\mathfrak{B}$ に対して

$$\prod_{U \in \mathfrak{B}} \chi_U \text{ が単射} \Leftrightarrow (X, \mathfrak{D}) \text{ が } T_0$$

が成立するからである.

$[\prod_{U \in \mathfrak{B}} \chi_U \text{ が単射} \Leftrightarrow (X, \mathfrak{D}) \text{ が } T_0]$ の証明.
まず T_0 とは

(T_0) 異なる 2 点 x, y について x の近傍で y を含まないようなものが存在するか、もしくは y の近傍で x を含

まないようなものが存在する

であることを思い出そう。この定義の「近傍」を開基 $\mathfrak{B}$ の元としても良い。(開基なので)

今、 $x \neq y$ と仮定すると T_0 から (x と y を適宜入れ替えて) $B \in \mathfrak{B}$ が存在して $x \in B$, $y \notin B$ としても一般性を失わない。このとき

$$\chi_B(x) = 1, \chi_B(y) = 0$$

なので

$$\prod_{U \in \mathfrak{B}} \chi_U(x) \neq \prod_{U \in \mathfrak{B}} \chi_U(y)$$

よって

$$x \neq y \Rightarrow \prod_{U \in \mathfrak{B}} \chi_U(x) \neq \prod_{U \in \mathfrak{B}} \chi_U(y)$$

なので $\prod_{U \in \mathfrak{B}} \chi_U$ は単射。逆はこの証明を下から読めばわかる。□

定義 8 (位相空間の重み). 位相空間 X の開基の最小濃度を位相空間 X の重みと言い、 $w(X)$ で表す。つまり

$$w(X) = \min\{\text{card}(\mathfrak{B}) \mid \mathfrak{B} \text{ は } X \text{ の開基}\}$$

である。

この位相空間の重みを用いて、位相空間それ自体の濃度が評価出来る。

系 9. T_0 空間に対して

$$\text{card}(X) \leq 2^{w(X)}$$

証明. X はシェルピンスキー空間の直積 $\prod_{U \in \mathfrak{B}} \{0, 1\}$ に埋め込まれ、

$$\text{card}\left(\prod_{U \in \mathfrak{B}} \{0, 1\}\right) = 2^{\text{card}(\mathfrak{B})}$$

となるので、 $\mathfrak{B}$ を $\text{card}(\mathfrak{B}) = w(X)$ となるものとして選べば

$$\text{card}(X) \leq 2^{w(X)}$$

が成り立つ。□

直ちに次のことがわかる。

系 10. 第二可算公理を充たす T_0 空間にたいして

$$\text{card}(X) \leq \mathfrak{c}$$

参考文献

- [1] 森田紀一, 位相空間論, 岩波全書 331, 岩波書店 1981
- [2] M.G.Murdeswar, general topology, Wiley Eastern Limited, 1983